Licht - Quanten Quantenoptik für Amateure Preprint Fassung Oktober 2015 ©mikomma.de

3.13 Quantisierung des em. Feldes

Die Quantisierung *des* elektromagnetischen (em.) Feldes gibt es nicht. Gleichwohl lauten viele Überschriften in Kurzeinführungen so, und vermitteln damit den Eindruck, dass es sich um ein eindeutiges Verfahren handelt, mit dem man *das* em. Feld quantisieren kann, und damit 'zwingend' von der klassischen Physik zur Quantenfeldtheorie kommt. Aber Quantisierungen sind keine zwingenden Verfahren (auch wenn das von Axiomatikern gerne so dargestellt wird), sondern Regeln, mit denen man *zunächst* die Quantenphysik an die klassischen Felder angepasst hat. Erstaunlicher Weise haben diese Regeln sich nicht nur bestens bewährt, sondern sogar eine neue Welt (der Verschränkung) hinter der klassischen Realität zugänglich gemacht (ein bisschen Recht haben die Axiomatiker schon :-). Und natürlich gibt es auch nicht *das* em. Feld, sondern unermesslich viele Varianten davon, die schon in einem 'klassischen Universum' in jedem Moment auf fast beliebig kleinem Raum alle möglichen Werte der Amplitude, Frequenz, Polarisation usw. annehmen können - und auch annehmen, ganz ohne unser Zutun. Wir versuchen dennoch unter der 'Standardüberschrift' *eine* Quantisierung *eines* em. Feldes, nur um das Prinzip aufzuzeigen. Dabei ist eine Erinnerung an die Entstehung der Quantenphysik sehr nützlich: Planck machte die Entdeckung, dass sich das Spektrum der em. Strahlung in einem Hohlraum (Schwarzkörperstrahlung) nur dann richtig beschreiben lässt, wenn die Oszillatoren in den Wänden des Hohlraums (also die Atome) nur diskrete Energien haben können. Und Einstein ergänzte: dann kann auch das em. Feld nur diskrete Energien haben (also Photonen). Salopp gesprochen hat Planck die 'erste Quantisierung' (Atome) angestoßen und Einstein die 'zweite Quantisierung' (Felder)[36]. [qem1 3.13.3]

3.13.1 Oversimplified

Das Prinzip oder die Problematik der Feldquantisierungen kann am Beispiel des em. Strahlungsfeldes kompakt (oder oversimplified) in einer Gleichung zusammengefasst werden:

$$n\hbar\omega = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 V \tag{3.51}$$

wobei wir zunächst das B-Feld weggelassen haben (es liefert den gleichen Beitrag zur klassischen Feldenergie wie das E-Feld). Auf der linken Seite steht die quantisierte Energie des elektrischen Feldes: Ein Photon der Kreisfrequenz ω hat die Energie $\hbar\omega$ und ein Feld mit n Photonen hat die n-fache Energie.

Auf der rechten Seite steht die kontinuierliche Energie des klassischen em. Feldes: mit der mittleren[37] Feldstärke $|\vec{E}|$ im Volumen V.

In Standard-Abituraufgaben wird gerne gefragt, wie viele Photonen sich in einem Feld (oder einem Laserstrahl?) der Energie 1 J (rechte Seite von 3.51) befinden, was

[36] Es gab es auch noch die Bohrsche Quantisierung: Elektronen springen in einem Atom über verbotene Zonen und emittieren oder absorbieren dabei ein Photon.

[37] Integration später 3.13.2

Licht - Quanten - Quantenoptik für Amateure Preprint Fassung Oktober 2015 ©mikomma.de

darauf hinausläuft, die Gleichung 3.51 nach einer natürlichen Zahl n aufzulösen, und in unsinnigen Zahlenbeispielen endet, weil die Zahl der für 1 J erforderlichen Photonen die Genauigkeit, mit der uns die Naturkonstanten bekannt sind, bei weitem überschreitet. Standard-Abituraufgaben lösen generell Gleichung 3.51 von links nach rechts. Das ist aber nicht 'die Feld-Quantisierung', die uns hier interessiert, sondern ihr genaues Gegenteil: Um die Gleichung 3.51 nach der Feldstärke $\vec{E}$ im Sinne der Quantenfeldtheorie (QFT) zu lösen, muss man einige Hindernisse überwinden:

Die Feldstärke tritt im Quadrat auf, es gehen also Informationen über Richtungen verloren, die man separat quantisiert muss (Impuls, Spin/Polarisation, Bahndrehimpuls). Die Energie des klassischen em. Feldes ist nur von der Amplitude (Feldstärke E) und nicht von der Frequenz abhängig. Und was macht man mit dem Volumen?

In einem ersten Anlauf kann man ja die 'Quantisierungs-Gleichung' 3.51 rein algebraisch nach $E = \sqrt{\vec{E}^2}$ auflösen:

$$E = \sqrt{n}\sqrt{2\hbar\omega/\epsilon_0 V} = \sqrt{n}E_0 \tag{3.52}$$

Die wesentliche Aussage dieser Gleichung liegt zunächst darin, dass die elektrische Feldstärke einer em. Welle (des 'freien em. Feldes') nicht alle Werte annehmen kann. Das ist zwar noch nicht *die* Quantisierung des elektrischen Feldes, aber man kann dieser Gleichung immerhin entnehmen: Wenn sich n Photonen der Frequenz[38] $f = \omega/2\pi$ in einem Volumen V befinden, dann kann die Amplitude *dises* elektrischen Feldes nur Werte annehmen, die proportional zu $\sqrt{n}$ sind. Dass der 'Proportionalitäts'faktor E_0 auch die Frequenz und das Volumen enthält, wirft wie erwähnt Fragen auf. Was passiert z.B. für die Frequenz 0, also ein statisches Feld[39]? Mit dem Volumen kann man leichter fertig werden, und sogar ein sinnvolles Zahlenbeispiel für die Abituraufgabe von morgen angeben: Bei den Experimenten von Haroche (Nobelpreis, Literaturangabe oder http...) schließt man einzelne Photonen der Frequenz 50 GHz in einen gut verspiegelten Hohlraum ein. Die stehende (Mikro-) Welle hat 9 Bäuche (TEM_{900}) und einen Durchmesser von 6 mm (Taille der Gaußmode). Wie groß ist die 'Feldstärke E_0 pro Photon'? Antwort: $E_0 \approx 3\,\mathrm{mV/m}$ (siehe auch R. Loudon [7] S. 186).

Wir nehmen das B-Feld hinzu:

$$n\hbar\omega = \frac{1}{2}\epsilon_0(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)V \tag{3.53}$$

Wie beim elektrischen Feld kann man in 'passenden Einheiten' $B_0 = E_0/c$ rechnen, und erhält mit den dimensionslosen Feldstärken $e = E/E_0$ und $b = B/B_0$ eine stark reduzierte 'Quantisierungsgleichung':

$$n = e^2 + b^2 \tag{3.54}$$

Was zunächst an den Satz des Pythagoras erinnert (wenn auf der linken Seite n^2 stünde). Tatsächlich haben die Feldstärken E und B auch etwas mit 'Quadratur' (einem rechten Winkel) zu tun [siehe Phasenraum...], aber die Quantisierung des em.

[38] in Zukunft wird nicht mehr zwischen Frequenz und Kreisfrequenz unterschieden...

[39] Dafür braucht man die volle QED, die auch statische Felder quantisieren kann.

Licht - Quanten Quantenoptik für Amateure Preprint Fassung Oktober 2015 ©mikomma.de

Feldes gelingt nicht mit dem Satz des Pythagoras, sondern nach dem Rezept 'man mache aus den komplexen Zahlen (Amplituden der klassischen Feldstärken) Operatoren mit passenden Vertauschungsregeln'. In diesem Sinne (Faktorisierung) kann man ja n als das Betragsquadrat einer komplexen Zahl auffassen: $n = |a| = aa^*$. Dann erhält man mit

$$a = e + ib \quad , \quad a^* = e - ib \tag{3.55}$$

wieder Gleichung 3.54.

Umgekehrt erhält man mit

$$e = (a + a^*)/2 \quad , \quad b = i(a^* - a)/2 \tag{3.56}$$

für die (dimensionslose, bzw. in obigen Einheiten berechnete) Energie des em. Feldes

$$n = (aa^* + a^*a)/2 \tag{3.57}$$

was natürlich nichts Neues ist, wenn man die kommutierenden komplexen Zahlen zusammenzählt. Vergleicht man das Ergebnis aber mit dem Hamiltonoperator des quanten*mechanischen* Oszillators

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \tag{3.58}$$

so liegt es nahe, die komplexen Zahlen a durch Operatoren $\hat{a}$ zu ersetzen. Das hat aber weitreichende Konsequenzen, denn für die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ gilt

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$$

also

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$$

Mit dieser Vertauschungsrelation und mit dem Operator für die Photonenzahl (Besetzungszahl) $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ schreibt sich Gleichung 3.58

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{1}{2}\hbar\omega(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2) \tag{3.59}$$

Wenn man also die Regeln der Quantenmechanik auf das em. Feld überträgt, bedeutet das (zusammengefasst/redundant):

1. Die Energie des em. Feldes mit der Frequenz f gibt es nur in Portionen hf. Das war ja auch so beabsichtigt, und man nennt diese Energieportionen Photonen, und hat damit einem (klassischen) Feld Teilchen zugeordnet: Feldquantisierung oder 2. Quantisierung[40].

[40] 1. Quantisierung: Teilchen → Welle (Schrödinger: Operatoren, Wellenfunktion. Heisenberg: Matrizen, Kommutator, kanonisch) 2. Quantisierung: Welle → Teilchen, Feldquantisierung, Lagrangedichte,...

Licht - Quanten Quantenoptik für Amateure Preprint Fassung Oktober 2015 ©mikomma.de

2. Das em. Feld 'benimmt sich' wie ein qm. Oszillator: innerhalb einer Mode (mit einer festen Frequenz) kann die Energie des Feldes nur diskrete Werte annehmen: Energieeigenwerte. Auch das war beabsichtigt, und die Änderung des Zustandes wird durch Leiteroperatoren 'bewerkstelligt'. Die Zahl n der Photonen in einer Mode entspricht dann dem n-ten Zustand des qm. Oszillators (Besetzungszahldarstellung).

3. Die klassischen Meßgrößen der Feldstärken E und B werden durch Eigenwerte von Operatoren ersetzt (siehe...).

4. Die Nichtvertauschbarkeit der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ ergibt eine Energie des Vakuums zu beliebiger Frequenz: $E_{Vac} = \frac{1}{2}\hbar\omega$, die beliebig groß werden kann.

Insbesondere der letzte Punkt (Energie des Vakuums) ist gewöhnungsbedürftig. Beim quanten*mechanischen* Oszillator kann man sagen: 'Nun ja, der kommt ja in Wirklichkeit gar nicht vor, also stört es auch nicht weiter, wenn seine niedrigste Energie nicht Null ist'. Aber wenn man diese Quantisierung auf das Strahlungsfeld übertragen will, stört es schon gewaltig, dass man für jede Frequenz ein 'halbes Photon gratis' dazu bekommt. Dabei ist weniger schlimm, dass es vom Ansatz her keine halben Photonen geben sollte, sondern dass die Summe dieser halben Photonen (ihrer Energien) über beliebige Frequenzen unendlich wird. Aber viel schlimmer ist noch, dass sich diese Energie des Vakuums einerseits 'wegnormieren' lässt (man rechnet nur mit Energiedifferenzen, bzw. verabredet eine *Normalordnung* von Operatoren (*Vakuumserwartungswert*, siehe... zu klären: $\langle 0||0\rangle = 1?$), die in Punkto Vakuumenergie die Operatoren wieder kommutativ macht...), andererseits aber viele Effekte sich nur mit dem 'elektromagnetischen Vakuum' (genauer seinen Schwankungen) erklären lassen (Lamb, Casimir, spontane Emission,...).

[qem2 3.13.3]

3.13.2 Kanonisch

Bis hierher haben wir eine einzige Mode des em. Feldes andeutungsweise quantisiert. Für eine 'vollständige Quantisierung' (kanonische Quantisierung,... QFT) fehlt noch einiges: [qem3 3.13.3]

Zunächst müssen wir Gleichung 3.53 ersetzen durch

$$H = \frac{1}{2}\int \epsilon_0(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)dV \tag{3.60}$$

Darin ist H die Gesamtenergie, oder genauer gesagt die Hamiltonfunktion[41]. Die Hamiltonfunktion der klassischen Mechanik ist eine Funktion von kanonisch konjugierten Variablen (z.B. Ort und Impuls), und 'kanonische Quantisierung' bedeutet, aus diesen Variablen Operatoren mit den 'passenden Vertauschungsregeln' zu machen. Der nächste Schritt zur Quantisierung des em. Feldes ist die (Fourier-) Entwicklung der Feldstärken nach Moden. Der allgemeinste Ansatz dazu ist das Vektorpotential

[41] Man kann auch mit der Energie- oder Hamilton*dichte* rechnen, wie in der QFT üblich, dann entfällt dieses Integral.

Licht - Quanten Quantenoptik für Amateure Preprint Fassung Oktober 2015 ©mikomma.de

$$A(r,t) \sim \sum_k \sum_{s=1}^{2} \left(a_{ks}\epsilon_{ks}e^{ikr} + a^*_{ks}\epsilon^*_{ks}e^{-ikr} \right) \tag{3.61}$$

In den Entwicklungskoeffizienten (oder Modenfunktionen) $a_{ks}\epsilon_{ks}$ steht dabei ϵ_{ks} für zwei zur Ausbreitungsrichtung der jeweiligen ebenen Welle[42] (mit Wellenvektor k, hier zur Vereinfachung der Notation ebenso wie r wie ein Skalar geschrieben) senkrechte 'Polarisationsrichtung' (komplex) und a_{ks} für die komplexe Amplitude, wobei im allgemeinen Fall beide Koeffizienten orts- und zeitabhängig sein können (die Ortsabhängigkeit von $A(r,t)$ wird also nicht alleine durch e^{ikr} bestimmt). Bei einem kontinuierlichen Spektrum der Wellenzahlen (oder Impulse) wird die Summe über k durch ein Integral ersetzt, bzw. die 'übliche Zeitabhängigkeit' $e^{i\omega t}$ durch ein Integral über die Zeit erweitert (Pulse).

Die vollständige bzw. korrekte Quantisierung des em. Feldes bildet die Grundlage für eine ganze Theorie, die Quantenelektrodynamik (QED) und ist alles andere als trivial - auch wenn sie (die QED) vom Standpunkt eines Vollblut-QFT-Theoretikers wie Lancaster [14] als das einfachste Beispiel einer Feldquantisierung quasi nebenbei erwähnt wird. Man hat die passende Mathematik gefunden, Felder zu quantisieren!

Im Rahmen dieser Darstellung ist aber nur wichtig: Die Quantisierung des 'Einmodenfeldes' (siehe Abschnitt 3.13.1) hat auch Bestand für Multimoden (diskret) und kontinuierliche Moden (und Glauber...).

Mit den Feldstärken

$$E(r,t) = -\frac{\partial}{\partial t}A(r,t) \quad , \quad B(r,t) = \nabla \times A(r,t) \tag{3.62}$$

erhält man dann (nach längerer Rechnung...)

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \sum_{s=1}^{2} \left(a_{ks}a^*_{ks} + a^*_{ks}a_{ks} \right) \tag{3.63}$$

Oder nach Übergang zu den Operatoren

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_k \sum_{s=1}^{2} \left(\hat{a}_{ks}\hat{a}^\dagger_{ks} + \hat{a}^\dagger_{ks}\hat{a}_{ks} \right) \tag{3.64}$$

Was sich vom Einmoden-Hamilton 3.59 nur durch die Summen (oder das Integral über k) unterscheidet. Jedenfalls ist man so (durch die Entwicklung nach Moden) in der Lage, 'beliebige' em. Felder zu quantisieren. Beispiele siehe 3.13.3.

Anmerkung zur Normalordnung von Operatoren: Um die Vakuumenergie bei der Berechnung von Erwartungswerten loszuwerden, hat man sich darauf geeinigt, Produkte von Erzeugern und Vernichtern immer so zu ordnen, dass alle Erzeuger links stehen. Dann entfällt im Hamilton die Vakuumenergie (so als wären die Operatoren

[42] Ebene Wellen sind das gängige ONS, andere ONS sind möglich.

Licht - Quanten Quantenoptik für Amateure Preprint Fassung Oktober 2015 ©mikomma.de

kommutativ[43]) und der Nummeroperator erzeugt aus dem Vakuum nicht 'versehentlich' Teilchen. [s.a. Lancaster]

[Vakuum siehe qem4 3.13.3.]

Bisher wurde das 'freie em. Feld' (oder das Strahlungsfeld) ohne Bezug zu seinen Quellen betrachtet, bzw. in einen voll verspiegelten Hohlraum eingeschlossen (Hohlraum-QED), in dem die Wände energetisch nichts zur Strahlung beitragen. Insofern muten die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wie eine mathematische Spielerei an. Wir wollen im nächsten Abschnitt die Feldquantisierung vom Kopf auf die Füße stellen, oder zumindest in ein Gleichgewicht mit den Strahlungsquellen (und -senken) bringen. Das geschieht in einem Hohlraum, dessen Wände die em. Strahlung nicht reflektieren, sondern voll absorbieren, weshalb dieser (hohle) Körper 'schwarz' genannt wird. Aber ein Körper, der em. Strahlung absorbiert, muss sie auch wieder abgeben (er ist also nicht schwarz) und früher oder später stellt sich in diesem Hohlraum ein Strahlungsgleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Strahlung ein. Die Beantwortung der Frage, wie das Spektrum dieser Strahlung aussieht, war die Geburtsstunde der Quantenphysik.

3.13.3 Planck - thermische Felder

Planck hat die Quantisierung bei der Untersuchung thermischer Strahler entdeckt. Bei thermischer Strahlung (also im Normalfall) kann man aber keine exakte Photonenzahl n angeben, sondern nur eine mittlere (siehe auch Gleichung 2.5 und Zahlenbeispiele dort):

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \tag{3.65}$$

Die Wahrscheinlichkeit, in diesem Strahlungsfeld n Photonen anzutreffen, ist dann geometrisch verteilt, siehe Photonenstatistik 4.6.2.

Mit der Modendichte[44] pro Einheitsintervall ω pro Einheitsvolumen V

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \tag{3.66}$$

und mit der Energie $\hbar\omega$ pro Mode/Photon ergibt das die Plancksche Strahlungsformel

$$\bar{U}(\omega) = \hbar\omega\bar{n}\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \tag{3.67}$$

Siehe auch Homepage M. Komma, Planck

[qem5 3.13.3]

[43] Unterscheide Bosonen und Fermionen

[44] ohne Faktor 2 für zwei Polarisationen