



<a href="#">Physik</a>	<a href="#">Elektrizität</a>	<a href="#">Optik</a>	<a href="#">Atomphysik Quantenphysik</a>	<a href="#">Mathematik</a>	<a href="#">Projekte Publikationen</a>	<a href="#">Suche KOM BLOG</a>
------------------------	------------------------------	-----------------------	--	----------------------------	--	------------------------------------



## Physik und Mathematik mit Maple

Dr. Michael Komma

 [English](#) (Google Translation)

[Site-Search](#)



Meist besucht			
<p>Quantenphysik</p> <p><a href="#">Der Quantensprung</a></p> <p><a href="#">Quantensprung in Zeitlupe</a></p> <p><a href="#">Are There Quantumjumps? Part I</a></p> <p><a href="#">Are There Quantumjumps? Part II</a></p> <p><a href="#">Korrespondenzprinzip</a></p> <p><a href="#">Ursprünge des Quantensprungs</a></p> <p><a href="#">Ein älteres Experiment</a></p> <p><a href="#">Rund um den Quantensprung!</a></p> <p><a href="#">Wie Politiker die Quanten springen lassen...</a></p>	<p>Quantenoptik</p> <p><a href="#">Das Photon am Doppelspalt</a></p> <p><a href="#">What is a photon?</a></p> <p><a href="#">Photonenstatistik</a></p> <p><a href="#">Phasenraum</a></p> <p><a href="#">Gequetschtes Licht</a></p> <p><a href="#">Frequenzkamm</a></p> <p><a href="#">Harmonischer Oszillator, quantenmechanisch</a></p> <p><a href="#">Energierörmung</a></p>	<p>Atomphysik</p> <p><a href="#">H-Orbitals I</a> (schöne Bilder!)</p> <p><a href="#">H-Orbitals II</a> (statistische Interpretation)</p> <p><a href="#">H-Orbitals III</a> (Details)</p> <p><a href="#">Plancksche Strahlungsformel</a></p> <p><a href="#">Elektrofluid</a></p> <p><a href="#">Paulfalle</a> (elektrisch)</p> <p><a href="#">Schrödinger</a></p> <p><a href="#">Rydbergatome</a></p>	<p>Optik</p> <p><a href="#">Punktgitter</a>   <a href="#">Kreuzgitter</a>   <a href="#">Raumgitter</a></p> <p><a href="#">Lochblende</a>   <a href="#">Rechteckblende</a>   <a href="#">Dreieckblende</a>   <a href="#">Kante</a>   <a href="#">Theorie</a></p> <p><a href="#">Interferenzmuster</a> (Doppelspalt)</p> <p><a href="#">Reflexion und Brechung</a></p> <p><a href="#">Licht im Medium</a></p> <p><a href="#">Brechungsindex</a></p> <p><a href="#">Dispersion</a>   <a href="#">Rechteckpulse</a></p> <p><a href="#">Form aus Kohärenz</a></p> <p><a href="#">Interferenz interaktiv</a></p>
	<p>Elektrizität</p> <p><a href="#">Hertzscher Dipol</a>   <a href="#">Ergänzungen</a></p> <p><a href="#">Energierörmung am Hertzschen Dipol (Absorption)</a></p> <p><a href="#">Multipolstrahlung</a></p> <p><a href="#">Elektrostatische Felder</a></p> <p><a href="#">Geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern</a></p> <p><a href="#">Eine neue Elektronenkanone?</a></p>	<p>Mechanik</p> <p><a href="#">Paulfalle</a> mechanisch</p> <p><a href="#">Paulfalle</a> mechanisch, Details</p> <p><a href="#">Harmonischer Oszillator?</a></p> <p><a href="#">Zykloidenpendel</a></p> <p><a href="#">Kreispandel</a></p> <p><a href="#">Mathematisches Pendel</a></p> <p><a href="#">Kugelpendel</a></p> <p><a href="#">Kugelpendel, Details</a></p> <p><a href="#">Interferenz - elementar</a> (Seilwellen)</p> <p><a href="#">Analemma</a></p>	<p>Didaktik</p> <p><a href="#">Der Spickzettel ist erlaubt!</a> (Schavan 1999)</p> <p><a href="#">Fortbildung zur Quantenphysik</a> (Oberschulamt Tübingen)</p>

Maple			
	 <p><a href="#">Moderne Physik mit Maple 16!</a></p>	 <p><a href="#">Maple Einführung, Anwendung, Referenz</a> (Kofler, Bitsch, Komma)</p>	<p><a href="#">E-Book</a></p> <p><a href="#">Maple-CD: Einführung, Anwendung, Referenz</a></p> <p>Download Worksheets <a href="#">Maple 16</a></p> <p>Server für <a href="#">Computer Algebra</a></p>
	<p><a href="#">Sitemap</a> (mit Frontpage automatisch erzeugt ;-))</p>	<p><a href="#">Elementarprozesse der Entstehung von Bremsstrahlung</a></p> <p>Nicht ganz ernst gemeint: <a href="#">Rhetorik</a></p>	<p>Werkverzeichnis meines Vaters <a href="#">Karl Michael Komma</a></p>

Kontakt: [mk\\_AT\\_mikomma.de](mailto:mk_AT_mikomma.de)

Copyright: Ich bin in der Lage, Plagiate zu verfolgen und abzustellen:

First they say it's impossible.

Then they steal my concepts.

Finally they'll pay!

© 1994- 2012

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Quantensprung in Zeitlupe

Ein Atom kann sich in [stationären Zuständen](#) befinden, z.B. mit den Quantenzahlen  $n,l,m = 1,0,0$  ([Grundzustand](#)) und  $n,l,m = 2,1,0$  (ein angeregter Zustand). Wie kann es seinen Zustand ändern?

Durch Emission oder Absorption von [elektromagnetischer Strahlung](#).

In der Quantenphysik berechnet man den Übergang von einem zum anderen Zustand durch die Überlagerung von Zuständen, z.B. mit den genannten Quantenzahlen, zu denen auch bestimmte Frequenzen gehören. Das Ergebnis ist eine Schwingung mit der Differenz der Frequenzen.

In der Animation sind neun Flächen gleicher Dichte der Elektronenladung (oder in der Sprache der Quantenphysik der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons) dargestellt, von violett (hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit) bis orange. Das Atom führt eine Dipolschwingung aus (in der Mitte ist der positiv geladene Kern zu denken) und gibt deshalb Dipolstrahlung ab oder absorbiert sie. Für Licht beträgt die Frequenz der Schwingung etwa  $10^{14}$  Hz. Der Vorgang/Übergang kann bis zu einigen Nanosekunden dauern, also etwa 100000 Schwingungen - je Lebensdauer des angeregten Zustands.

Und wo ist nun der [Quantensprung](#) geblieben?

[Weitere Quantensprünge](#)

Und so geht es in einem Atom zu, das sich nicht entscheiden kann, ob es sich im Zustand  $4,0,0$  oder  $5,2,1$  aufhalten soll. Je komplexer die Struktur, desto länger die Lebensdauer?

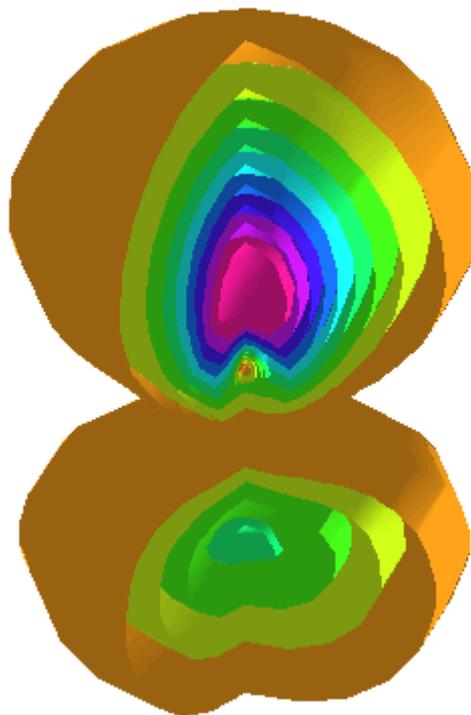
Der aufmerksame Betrachter sieht übrigens eine Rotation und [Quadrupolstrahlung](#).

Und wo ist nun der [Quantensprung](#) geblieben?

(Der Programmierer hat es so eingerichtet, dass er nicht stattfindet ;-))

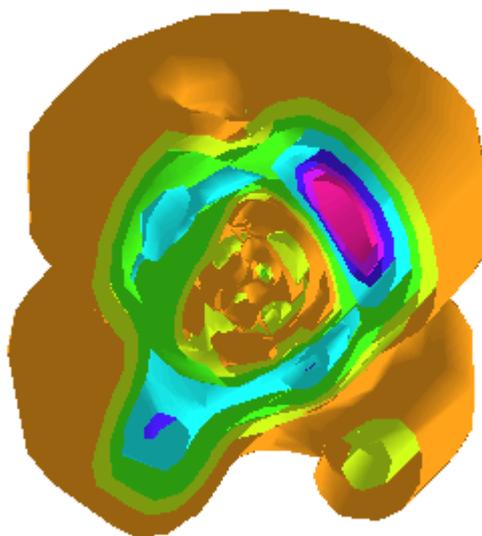
[Weitere Quantensprünge](#)

$$n,l,m = 1,0,0 \leftrightarrow 2,1,0$$



[Quicktime-Movie \(1,1MB\)](#)

$$n,l,m = 4,0,0 \leftrightarrow 5,2,1$$

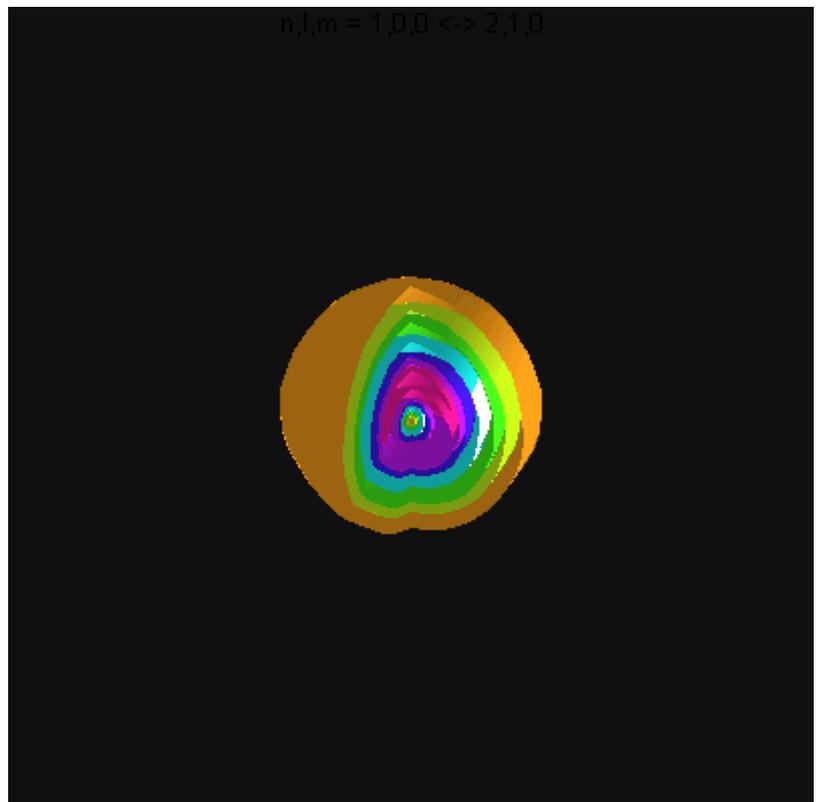


Hier hat der angeregte Zustand eine kurze Lebensdauer: 40 Schwingungen für die Anregung und 40 für die Rückkehr in den Grundzustand.

Und wo ist nun der [Quantensprung](#) geblieben?

Nun ja - ein Übergang scheint ja stattzufinden. Man sieht nur nicht was dabei rauskommt...

[Weitere Quantensprünge](#)

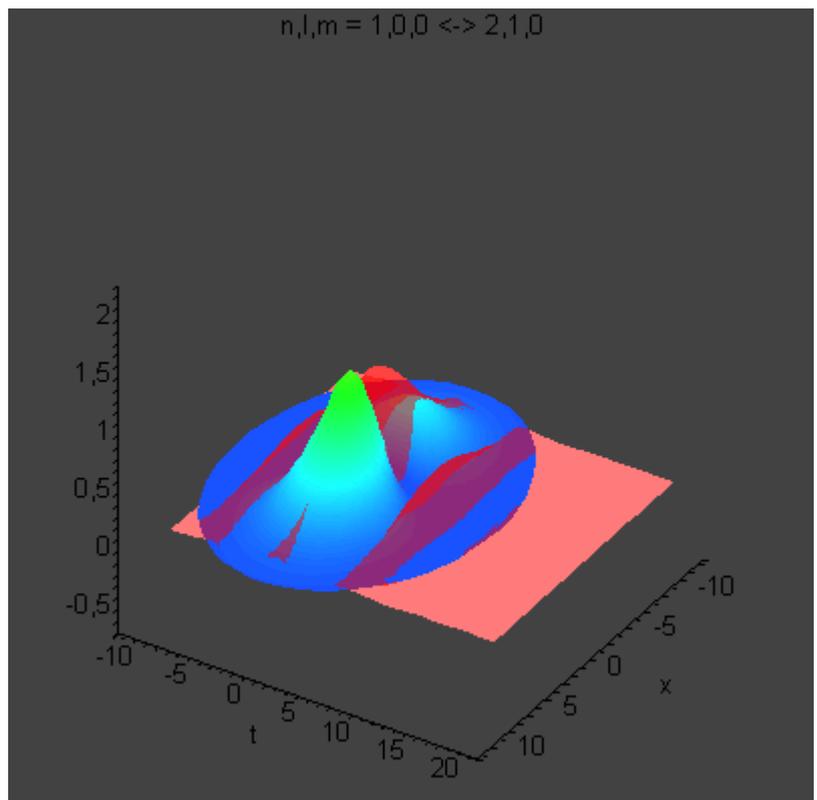


Diese Darstellung ist etwas abstrakter: Auf der blauen Membran schwingt das Elektron (Schnitt durch die 3D-Darstellungen der Elektronendichte von oben) und produziert dabei auf dem roten Teppich (Maxwells Vakuum) ein [Photon](#)\*.

Ob Schrödinger sich das so vorgestellt hat?

Jedenfalls meinte er: *"If we have to go on with these damned quantum jumps, then I'm sorry that I ever got involved!"*

\* Die Darstellung der Elektronendichte ist physikalisch korrekt (H-Eigenfunktionen). Die Darstellung des Photons wurde mit einer gewissen künstlerischen Freiheit programmiert (Transparenz des roten Teppichs :-)). Die t-Achse sollte besser y-Achse heißen, stellt jedenfalls eine räumliche Dimension dar. Nach oben sind jeweils "Amplituden" abgetragen: Beim "Photon" die Amplitude eines Wellenpakets und für das Elektron die Wahrscheinlichkeitsdichte beim Übergang  $2,1,0 \rightarrow 1,0,0$ .



Natürlich lassen sich diese Bilder in einem Maple-Worksheet mit wesentlich höherer Auflösung herstellen und interaktiv bearbeiten...

["Are there quantum jumps?"](#)

[Historisches zum Quantensprung](#)

[Weitere Quantensprünge](#)

H-Orbitals aus ["Moderne Physik mit Maple"](#)

[Plancks Formel](#)

[Energieströmung](#)

[komma\\_AT\\_oe.uni-tuebingen.de](mailto:komma_AT_oe.uni-tuebingen.de)

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Are There Quantum Jumps?

Was [sagt](#) Schrödinger dazu?

"Das Ablassen von der Theorie der Quantensprünge, die mir persönlich von Jahr zu Jahr unannehbarer erscheinen, hat nun freilich erhebliche Konsequenzen!"

Und so sieht Schrödingers Originaltext aus (erste Seite):

# ARE THERE QUANTUM JUMPS ?

## PART I\*

E. SCHRÖDINGER

' . . . cominciai a credere, che uno, che lascia un'opinione imbevuta col latte, e seguita da infiniti, per venire in un' altra da pochissimi seguita, e negata da tutte le scuole, e che veramente sembra un paradosso grandissimo, bisognasse per necessità, che fusse mosso, per non dir forzato, da ragioni più efficaci.' Galileo, *Dialogue on the Two Greatest World Systems*, 2nd Day.

### I *The Cultural Background*

PHYSICAL science, which aims not only at devising fascinating new experiments, but at obtaining a rational understanding of the results of observations, incurs at present, so I believe, the grave danger of getting severed from its historical background. The innovations of thought in the last 50 years, great and momentous and unavoidable as they were, are usually overrated compared with those of the preceding century; and the disproportionate foreshortening by time-perspective, of previous achievements on which all our enlightenment in modern times depends, reaches a disconcerting degree according as earlier and earlier centuries are considered. Along with this disregard for historical linkage there is a tendency to forget that all science is bound up with human culture in general, and that scientific findings, even those which at the moment appear the most advanced and esoteric and difficult to grasp, are meaningless outside their cultural context. A theoretical science, unaware that those of its constructs considered relevant and momentous are destined eventually to be

\* Received 28. iv. 52

Schrödinger beginnt seinen Artikel (sein Pamphlet)

*Are There Quantum Jumps? Part I*

*The British Journal for the Philosophy of Science*, 3, (1952), 109-123 [B 12]

mit einem Zitat aus Galileos 'Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme'. Dort sagt Sagredo am zweiten Tag:

" ... ich begann zu glauben, daß einer, der eine Meinung, die er schon mit der Muttermilch aufgesogen hat und der

unzählige gefolgt sind, aufgibt, um zu einer anderen zu gelangen, die nur verschwindend wenige teilen und die von allen Schulen abgelehnt wird und die auch tatsächlich ein riesiges Paradoxon scheint, daß ein solcher also unbedingt von tieferliegenden Argumenten angetrieben, wenn nicht geradezu gezwungen sein müsste."

Dabei lässt er die erste Hälfte des Satzes weg, in der Sagredo das Ptolemäische und das Kopernikanische Weltbild gegenüberstellt. Hier ist der ganze Satz:

"Là onde, considerando io come nessun è che segua l'opinione del Copernico, che non sia stato prima della contraria e che non sia benissimo informato delle ragioni di Aristotile e di Tolomeo, e che all'incontro nissuno è de' seguaci di Tolomeo e d'Aristotile, che sia stato per addietro dell'opinione del Copernico e quella abbia lasciata per venire in quella d'Aristotile, considerando, dico, queste cose, cominciai a credere che uno che lascia un'opinione imbevuta col latte e seguita da infiniti, per venire in un'altra da pochissimi seguita, e negata da tutte le scuole e che veramente sembra un paradosso grandissimo, bisognasse per necessità che fusse mosso, per non dir forzato, da ragioni più efficaci."

Er will also in erster Linie die Situation darstellen, in der sich einer befindet, der mit überkommenen Schulmeinungen zu kämpfen hat. Daß jeder Leser von 'The British Journal for the Philosophy of Science' weiß worum es in diesem Dialog geht, kann er wohl auch voraussetzen. Auch wendet er sich im Jahre 1952 (also 26 Jahre nach "der Schrödingergleichung") weniger an Physiker, sondern in einer Zeitschrift für Wissenschaftsphilosophie an alle Leser mit einem "kulturellen Hintergrund".

Ist das 50 Jahre später (2005) noch interessant?

Worum geht es hier eigentlich?

Lesen Sie selbst (der Originaltext steht in << >>, Übersetzungen z.T. etwas verkürzt und relativ frei in " "):

<<ARE THERE QUANTUM JUMPS?

PART I [Received 28. iv. 52]

E. SCHRÖDINGER

'...cominciai a credere, che uno, che lascia un'opinione imbevuta col latte, e seguita da infiniti, per venire in un' altra da pochissimi seguita, e negata da tutte le scuole, e che veramente sembra un paradosso grandissimo, bisognasse per necessità, che fusse mosso, per non dir forzato, di ragioni più efficaci.' Galileo, *Dialogue on the Two Greatest World Systems*, 2nd Day.

### 1 The Cultural Background

Physical science, which aims not only at devising fascinating new experiments, but at obtaining a rational understanding of the results of observations, incurs at present, so I believe, the grave danger of getting severed from its historical background. The innovations of thought in the last 50 years, great and momentous and unavoidable as they were, are usually overrated compared with those of the preceding century; and the disproportionate foreshortening by time-perspective, of previous achievements on which all our enlightenment in modern times depends, reaches a disconcerting degree according as earlier and earlier centuries are considered. Along with this disregard for historical linkage there is a tendency to forget that all science is bound up with human culture in general, and that scientific findings, even those which at the moment appear the most advanced and esoteric and difficult to grasp, are meaningless outside their cultural context. A theoretical science, unaware that those of its constructs considered relevant and momentous are destined eventually to be framed in concepts and words that have a grip on the educated community and become part and parcel of the general world picture - a theoretical science, I say, where this is forgotten, and where the initiated continue musing to each other in terms that are, at best, understood by a small group of close fellow travellers, will necessarily be cut off from the rest of cultural mankind; in the long run it is bound to atrophy and ossify, however virulently esoteric chat may continue within its joyfully isolated groups of experts. This has happened before in similar circumstances. Benjamin Farrington puts it admirably in his *Greek Science*, vol. 2, p. 273 Pelican Books, London, 1949:

'Perhaps the most decisive defeat of the scientific spirit in antiquity had been the loss of the sense of history. History is the most fundamental science, for there is no human knowledge which cannot lose its scientific character when men forget the conditions under which it originated, the questions which it answered, and the functions it was created to serve. A great part of the mysticism and superstition of educated men consists of knowledge which has broken loose from its historical moorings.'

The disregard for historical connectedness, nay the pride of embarking on new ways of thought, of production and of action, the keen endeavour of shaking off, as it were, the indebtedness to our predecessors, are no doubt a general trend of our time. In the fine arts we notice strong currents quite obviously informed by this vein; we witness its results in modern painting, sculpture, architecture, music and poetry. There are many who look upon this as a new buoyant rise, while others regard it as a flaring up that inaugurates decay. It is not here the place to dwell on this question, and my personal views on it might interest nobody. But I may say that whenever this trend enters science, it ought to be opposed. There obviously is

a certain danger of its intruding into science in general, which is not an isolated enterprise of the human spirit, but grows on the same historic soil as the others and participates in the mood of the age. There is, however, so I believe, no other nearly so blatant example of this happening as the theories of physical science in our time. I believe that we are here facing a development which is the precise counterpart of that in the fine arts alluded to above. The most appropriate expression to use for it is one borrowed from the history of poetry: Gongorism. It refers to the poetry of the Spaniard Luis de Gongora (1561-1627), very fine poems, by the way, especially the early ones. Yet also his later poems (to which the term more particularly refers) are well sounding and *they all make sense*. But he uses all his acuity and skill on making it as difficult as possible to the reader to unravel the sense, so that even natives of Castile use extended commentaries to grasp the meaning safely.

One ought not, I think, to say that if, in this, physics is following a general trend of our time, we must not oppose it. Though we are entirely the product of historical development, yet it is we who make its continuation and not history that drags us along a predestined trail. It depends entirely on us, on our stopping to think and acting according to reason, whether there will be decay or a new rise after the crisis. This is what Bertrand Russell in recent years has not tired to inculcate with regard to much more momentous questions than the fate of theoretical physics. However, here we shall be concerned with the latter.

My friend and scientific colleague Professor Hans Thirring, in his book *Homo Sapiens*, [Wien, 1948] in which he conducts an elaborate and very creditable campaign against War, and for Universal Peace, incidentally opines that in antiquity everybody except a few men of genius considered the earth to be a flat disk. Professor E. P. Wigner, in an article on 'The Limits of Science' [*Proc. Am. Philosoph. Soc.* 1950, 94, 422] is in doubt whether to date the 'birthyear' of chemistry around 1780 (Lavoisier) or at 1808 (Dalton's law). Physics, he says, is somewhat older, since Newton's *Principia* became available in 1687. He grants that 'Archimedes discovered laws of physics around 250 B.C. but his discoveries can hardly be called the real beginning of physics.' I must not take up space by refuting these strange views, but refer the reader to Professor Benjamin Farrington's two excellent Pelican books on *Greek Science*. Still I would mention that among the 'insignificant' discoveries of that period was the inference, drawn (probably by Archimedes) from the heliocentric system of Aristarchus, that the fixed stars must be at least at a distance of, in our units, about two light years; and the further conclusion that from there the sun would appear as a faint star, and therefore, inversely, many of those stars must equal and even exceed the sun in size - or luminosity, as we would call it today. Of course scientific knowledge takes some time to get a grip on the cultured community. Charles Darwin tells us in the *Voyage of a Naturalist* of the sensation he caused in 1833 among the 'educated' society in Argentine by telling them that the earth is a sphere. This knowledge was then more than 2,300 years old.>>

So weit der Philosoph Schrödinger. Leider gibt es auch heute noch Physiker, die Schrödinger in die Philosophenecke stellen wollen, auch wenn sie täglich seine Gleichung benutzen. Aber keine Sorge - der Physiker Schrödinger lässt nun seine Katze aus dem Sack:

<<What has all this to do with quantum jumps? I have been trying to produce a mood that makes one wonder what parts of contemporary science will still be of interest to others than historians 2,000 years hence. There have been ingenious constructs of the human mind that gave an exceedingly accurate description of observed facts and have yet lost all interest except to historians. I am thinking of the theory of epicycles. I confess to the heretical view that their modern counterpart in physical theory are the quantum jumps. Or rather these correspond to the *circles* which the sun, the moon and the stars were thought to describe around the earth in 24 hours after earlier and better knowledge had been condemned. I am reminded of *epicycles* of various orders when I am told of the hierarchy of *virtual* quantum transitions. But let these rude remarks not deter you. We shall now come to grips with the subject proper. >>

"Was hat all das mit Quantensprüngen zu tun? Ich wollte eine Stimmung erzeugen, die einen neugierig macht, was von der gegenwärtigen Wissenschaft in 2000 Jahren außer für Historiker noch interessant sein wird. Es gab erfinderische Konstrukte des menschlichen Geistes, die eine sehr genaue Beschreibung der beobachteten Fakten lieferten und trotzdem nur noch von historischem Interesse sind. Ich denke dabei an die Theorie der Epizyklen. Und ich bekenne mich zu dem ketzerischen Standpunkt, dass ihr modernes Entsprechungsstück in der theoretischen Physik die Quantensprünge sind. Sie entsprechen den gedachten *Kreisen*, die die Sonne, der Mond und die Sterne täglich um die Erde beschreiben nachdem man früheres und besseres Wissen verdammt hatte. Es erinnert mich an *Epizyklen* verschiedener Ordnung, wenn man mir von *gedachten* Quantenübergängen erzählt. Aber lassen Sie sich von diesen groben Anmerkungen nicht abschrecken. Wir werden nun das eigentlich Thema anpacken."

Nun - das ist doch starker Tobak! Schrödinger bekennt sich zur Ketzerei und vergleicht die orthodoxe Quantenphysik (Kopenhagen-Schule) mit den Zeiten vor der Kopernikanischen Wende. Da muss er natürlich im einführenden Zitat eine Anleihe bei Galileo machen und einen kleinen Umweg über den "kulturellen Hintergrund". Das Thema ist aber auch heute noch äußerst spannend (und nicht nur für Historiker interessant) und es ist schön zu lesen, wie Schrödinger mit den Wörtern spielt: Das "eigentliche Thema" (subject proper) führt direkt zu seinen *Proper Modes* (Eigenschwingungen):

#### <<2 The Discontinuous States as Proper Modes

Max Planck's essential step in 1900, amounted, as we say now, to laying the foundation of quantum theory; it was his

discovery, by abstract thought, of a *discontinuity* where it was least expected, namely in the exchange of energy between an elementary material system (atom or molecule) and the radiation of light and heat. He was at first very reluctant to draw the much more incisive conclusion that each atom or molecule had only to choose between a *discrete* set of 'states'; that it could normally only harbour certain discrete amounts of energy, sharply defined and characteristic of its nature; that it would normally find itself on one of these 'energy levels' (as the modern expression runs) - except when it changes over more or less abruptly from one to another, radiating its surplus energy to the surrounding, or absorbing the required amount from there, as the case may be. Planck was even more hesitant to adopt the view that radiation itself be divided up into portions or light-quanta or 'photons', to use the present terminology. In all this his hesitance had good reasons. Yet only a few years later (1905) Einstein advanced the hypothesis of light-quanta, clinching it with irresistible arguments; and in 1913 Niels Bohr, by taking the discrete states of the atoms seriously and extending Planck's assumptions in two directions with great ingenuity, but irrefutable consistency, could explain quantitatively some of the atomic line spectra, which are all patently *discrete*, and which had in their entirety formed a great conundrum up to then:>>

"Max Planck hatte 1900 die Quantentheorie begründet indem er durch abstraktes Denken eine Diskontinuität entdeckte wo niemand sie vermutet hätte, nämlich beim Austausch von Energie zwischen materiellen Körpern und (elektromagnetischer) Strahlung. Es widerstrebte ihm zunächst sehr, die noch viel einschneidendere Folgerung daraus zu ziehen, dass jedes Atom oder Molekül nur einen *diskreten* Satz an 'Zuständen' besitzt und deshalb normalerweise nur bestimmte diskrete und scharf definierte Energiebeträge (die für es selbst charakteristisch sind) aufnehmen kann; dass es sich also normalerweise auf einem dieser Energie-Level (so die moderne Sprechweise) befindet - außer wenn es mehr oder weniger abrupt von einem (Level) zum anderen wechselt und dabei die Energiedifferenz emittiert oder absorbiert. Planck zögerte noch mehr, die Sichtweise anzunehmen, dass die Strahlung selbst in Portionen oder Lichtquanten oder 'Photonen' (gegenwärtige Terminologie) aufgeteilt ist. Bei all dem hatte sein Zögern gute Gründe. Gleichwohl stellte Einstein nur ein paar Jahre später (1905) die Hypothese der Lichtquanten auf und verband sie mit unwiderstehlichen Argumenten; und 1913 nahm Niels Bohr die diskreten Zustände ernst, erweiterte Plancks Annahmen mit großem Scharfsinn und unwiderlegbarer Konsistenz in zwei Richtungen und konnte damit einige der Linienspektren, die offensichtlich alle *diskret* sind und bis dahin ein Rätsel waren, erklären."

Nun sind also auch Schröningers Gegenspieler persönlich genannt: Einstein und Bohr, aber auch der "kulturelle Hintergrund": Planck. Die "unwiderlegbare Konsistenz" der Bohrschen Argumentation ist wohl ironisch gemeint (wie wir später sehen werden).

<<Bohr's theory turned them into the ultimate and irrevocable direct evidence, that the discrete states are a genuine and real fact. Bohr's theory held the ground for about a dozen of years, scoring a grand series of so marvellous and genuine successes, that we may well claim excuses for having shut our eyes to its one great deficiency: while describing minutely the so-called 'stationary' states which the atom had normally, i.e. in the comparatively uninteresting periods when *nothing happens*, the theory was silent about the periods of transition or '*quantum jumps*' (as one then began to call them). Since intermediary states had to remain disallowed, one could not but regard the transition as instantaneous; but on the other hand, the radiating of a coherent wave train of 3 or 4 feet length, as it can be observed in an interferometer, would use up just about the average interval between two transitions, leaving the atom no time to 'be' in those stationary states, the only ones of which the theory gave a description.>>

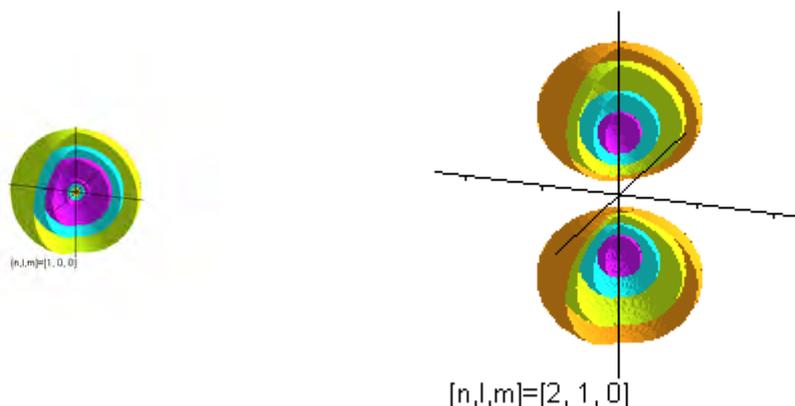
"Bohrs Theorie verwandelte die Linienspektren in den ultimativen und unwiderruflichen direkten Beweis, dass die diskreten Zustände eine wahre und reale Tatsache sind. Bohrs Theorie bildete die Grundlage für ein dutzend Jahre, sie verzeichnete dabei eine Reihe von so erstaunlichen und echten Erfolgen, dass die Entschuldigung dafür nicht schwer fällt, dass wir unsere Augen vor ihrer einen großen Unzulänglichkeit verschlossen: Während sie minutiös die so genannten 'stationären' Zustände beschreibt, die das Atom normalerweise hatte, also in den vergleichsweise uninteressanten Zeitabschnitten wenn *nichts passiert*, schwieg sich die Theorie aus über die Zeitabschnitte der Übergänge oder 'Quantensprünge' (wie man sie dann zu nennen begann). Nachdem Zwischenzustände weiterhin verboten bleiben mussten, konnte man nicht umhin, die Übergänge als instantan zu betrachten; aber andererseits: die Strahlung eines kohärenten Wellenzugs von 3 bis 4 Fuß Länge, wie sie in einem Interferometer beobachtet werden kann, würde gerade etwa die mittlere Zeit zwischen zwei Übergängen verbrauchen und damit dem Atom keine Zeit lassen, in diesen stationären Zuständen zu 'sein', den einzigen Zuständen also, die die Theorie beschrieb."

Köstlich! Bohrs Theorie wird großartig gewürdigt und aufgebaut, um sie dann gründlich in Frage zu stellen: Die Atome haben gar keine Zeit, sich in den 'stationären' Zuständen zu befinden. Das eigentliche Geschehen wird von dieser Theorie nicht beschrieben, sondern in einen instantanen Quantensprung gepackt - der Offenbarungseid für die Dogmen (Postulate) aus Kopenhagen. Um so erstaunlicher, dass so große Physiker wie Einstein und Bohr (u.a.m.) diese Schwachstelle so lange ignoriert haben und dass noch heute Schulbücher (aber auch Lehrbücher für das Physikstudium) an den stationären Zuständen und den Quantensprüngen festhalten. Alleine die Überlegung, dass eine sprunghafte Änderung der Energie unendlich viel Leistung erfordert muss doch bedenklich stimmen. Auch heute noch spricht man von dem Photon als Energiepaket, das in einem Akt absorbiert oder emittiert wird. Dass ein Photon eine bestimmte Energie trägt, ist sicher richtig. Aber daraus folgt noch lange nicht, dass diese Energie sprunghaft übertragen wird. Man kann heute Photonen mit einer Kohärenzlänge erzeugen, die im Kilometerbereich liegt, die also mit sehr geringer Leistung emittiert und absorbiert werden. Ebenso ist längst bekannt (und war es schon zu Zeiten Bohrs), dass die Energie eines Photons nicht vollständig absorbiert werden muss, sondern dass dies vom jeweiligen Elementarprozess abhängt. Die vollständige Absorption ist ein

Resonanzphänomen. Beim Comptonstoß kann ein Photon alle kinematisch erlaubten Energien an das Elektron abgeben.

Im "Einsteinjahr 2005" sollte man auch erwähnen, dass Einstein seinen Nobelpreis 1921 "insbesondere für den Photoeffekt" erhielt (die Begründung des Nobel-Komitees: "for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect"). Allerdings vertrat er 1905 noch Ansichten, die man getrost unter "die größten Irrtümer eines Genies" einordnen kann. So in den Annalen der Physik 1905, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" (das ist der Artikel zum "photoelectric effect"), Seite 133: "Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei der Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende Räume verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können". Später hat Einstein das etwas modifiziert (Photon = Singularität, die von einem Vektorfeld umgeben ist), aber der Irrtum hatte sich schon weltweit verbreitet und geistert heute noch durch die Literatur (insbesondere in Schulbüchern) und die Köpfe so mancher Physiker. "Quanten (Photonen) sind in Raumpunkten lokalisierbar und unteilbar", denn schließlich hat ja Einstein seinen Nobelpreis dafür bekommen! Was in Raumpunkten lokalisiert ist und sich als Ganzes bewegt, ist nichts anderes als ein Newtonsches Teilchen und wenn es erzeugt oder absorbiert wird, dann kann das nur in unendlich kurzer Zeit geschehen (Punkt da oder nicht da) - einem Quantensprung (den kannte Newton allerdings nicht ;-)). Weshalb verstieg sich das Relativitätsgenie Einstein zu einer solch kühnen Hypothese? Er wollte einfach den Unterschied zur Maxwelltheorie klarmachen, in der sich die Energie der Strahlung kontinuierlich über den Raum verteilt. Es bleibt aber auch heute noch völlig unverständlich, weshalb er dabei vergaß, dass zwischen einem Punkt und einem fast punktförmigen Gebilde unendlich viele Größenordnungen liegen: Weder das Photon noch das Elektron noch irgend ein Teilchen ist punktförmig. Und gerade Einstein hätte wissen müssen, dass sich Energie nicht in einem Punkt (einer Singularität) konzentrieren lässt und damit in einem Zeitpunkt übertragen lässt. Immerhin war er ja vorsichtig genug, seine Idee als einen "heuristischen Gesichtspunkt" einzustufen...

Aber was sind nun diese oben erwähnten mysteriösen 'stationären' Zustände? Hier sind zwei davon:



Hierbei handelt es sich um eine ausgesprochene [Raritätensammlung](#), weil das Atom kaum Zeit hat, sich in solch einem 'stationären' Zustand aufzuhalten (außer im Grundzustand links). Trotzdem liest und hört man immer wieder (auch heute noch), dass sich in diesen Zuständen nichts bewegt und dass sie das Ergebnis einer Ortsmessung seien. Als ob es eingefrorene Atome gäbe, bei denen man in aller Ruhe und punktgenau die Ortsverteilung des Elektrons bestimmen könnte. Schrödinger hatte noch keinen Computer, mit dem er solche Bilder erzeugen konnte. Aber er hatte die richtigen Bilder im Kopf und vor allem die Gleichung dafür. Sie entstehen, wenn man die Lösung der Schrödingergleichung im Coulombpotential berechnet. Der experimentelle Nachweis wird *nicht* mit einer *Ortsmessung* gemacht, sondern mit einer *Impulsmessung der Wellenfunktion*, die man dann mit einer Fouriertransformation in den Ortsraum überführt. Die Realität ist also das genaue Gegenteil der Bohrschen Theorie. Das Atom befindet sich praktisch nie in einem reinen angeregten Zustand, sondern meistens in den 'verbotenen' Zwischenzuständen (oder im Grundzustand). Wie löst Schrödinger dieses Problem? Ganz einfach:

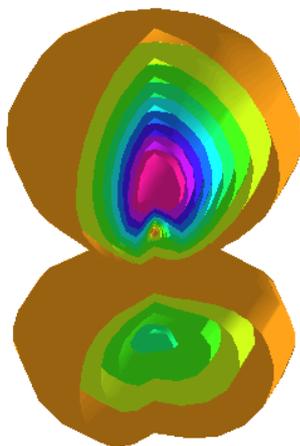
<<This difficulty was overcome by quantum mechanics, more especially by wave mechanics, which furnished a new description of the *states*; this was precisely what was still missing in the earliest version of the new theory which had preceded wave mechanics by about one year. The previously admitted discontinuity was not abandoned, but it shifted from the *states* to something else, which is most easily grasped by the simile of a vibrating string or drumhead or metal plate, or of a bell that is tolling. If such a body is struck, it is set vibrating, that is to say it is slightly deformed and then runs in rapid succession through a continuous series of slight deformations again and again. There is, of course, an infinite variety of ways of striking a given body, say a bell, by a hard or soft, sharp or blunt instrument, at different points or at several points at a time. This produces an infinite variety of initial deformations and accordingly a truly infinite variety of shapes of the ensuing vibration: the rapid 'succession of cinema pictures', so we might call it, which describes the vibration following on a particular initial deformation is infinitely manifold. But in every case, however complicated the actual motion is, it can be mathematically analysed as being the *superposition* of a discrete series of comparatively simple 'proper vibrations,' each of which goes on with a quite definite frequency. This discrete series of frequencies depends on the shape and on the material of the body, its density and elastic properties. It can be computed from the theory of elasticity, from which the existence and the discreteness of proper modes and proper frequencies, and the fact that any possible vibration of that body can be analysed into a superposition of them, are very easily deduced quite generally, i.e. for an elastic body of any shape whatsoever.>>

"Diese Schwierigkeit wurde durch die Quantenmechanik, insbesondere die Wellenmechanik überwunden, die eine neue Beschreibung der *Zustände* lieferte; das war genau, was in der frühesten Version der neuen Theorie, die der Wellenmechanik ungefähr ein Jahr vorausging, fehlte. Die vorher zugestandene Diskontinuität wurde nicht aufgegeben, sondern von den *Zuständen* auf etwas verschoben, was man am ehesten mit dem Gleichnis eines schwingenden Körpers (Saite, Trommelfell, Metallplatte oder Glocke) erfasst. Wird solch ein Körper angeschlagen, so kann er in einer unendlichen Vielfalt schwingen - abhängig von seiner Beschaffenheit und davon wie er angeschlagen wird: Die schnelle 'Abfolge von Filmbildern', wie wir es nennen könnten, die beschreibt wie aus einer einzelnen anfänglichen Verformung eine Schwingung folgt, ist unendlich mannigfaltig. Aber egal wie kompliziert die tatsächliche Bewegung ist, sie kann mathematisch als Überlagerung einer diskreten Reihe von vergleichsweise einfachen 'Eigenschwingungen' dargestellt werden, von denen jede mit einer ganz bestimmten Frequenz abläuft. Diese Reihe von Frequenzen hängt von den Eigenschaften des elastischen Körpers ab (und kann mit den Mitteln der Elastizitätstheorie berechnet werden)."

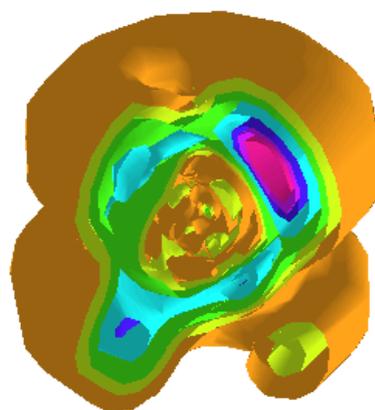
War Schrödinger Hellseher? Weshalb sah er diese Filme vor seinem geistigen Auge?

$n,l,m = 4,0,0 \leftrightarrow 5,2,1$

$n,l,m = 1,0,0 \leftrightarrow 2,1,0$



[Details](#)



[Details](#)

Schrödinger war jedenfalls insofern Hellseher, als er die Lösungen der Schrödingergleichung berechnet hatte :-)) Und so machen wir das heute noch mit unseren Computern...

[Weitere Quantensprünge](#)

Die Bohrsche Sicht, die auch heute noch mit dem Quantensprung vermittelt wird, sieht so aus:

## Der Quantensprung



Und nun?

<<The achievement of wave mechanics was, that it found a general model picture in which the 'stationary' states of Bohr's theory take the rôle of proper vibrations, and their discrete 'energy levels' the rôle of the proper frequencies of these proper vibrations ; and all this follows from the new theory, once it is accepted, as simply and neatly as in the theory of elastic bodies, which we mentioned as a simile. Moreover, the radiated frequencies, observed in the line spectra, are in the new model, equal to the *differences* of the proper frequencies; and this is easily understood, when two of them are acting simultaneously, on simple assumptions about the nature of the vibrating 'something.'>>

"Die Errungenschaft der Wellenmechanik war es, ein allgemeines Bild zu finden, in dem die 'stationären' Zustände der Bohrschen Theorie Eigenschwingungen sind und die diskreten Energien Eigenfrequenzen entsprechen. [...] Darüber hinaus sind in dem neuen Modell die abgestrahlten Frequenzen die Differenzen der Eigenfrequenzen, was man leicht verstehen kann, wenn diese Eigenschwingungen überlagert werden."

<< 3 *The Alleged Energy Balance - a Resonance Phenomenon*

But to me the following point has always seemed the most relevant, and it is the one I wish to stress here, because it has been almost obliterated - if words mean something, and if certain words now in general use are taken to mean what they say. The principle of superposition not only bridges the gaps between the 'stationary' states, and allows, nay compels us, to admit intermediate states without removing the discreteness of the 'energy levels' (because they have become proper frequencies) ; but it completely *does away with the prerogative of the stationary states*. The epithet stationary has become obsolete. Nobody who would get acquainted with wave mechanics without knowing its predecessor (the Planck-Einstein-Bohr-theory) would be inclined to think that a wave-mechanical system has a predilection for being affected by only one of its proper modes at a time. Yet this is implied by the continued use of the words 'energy levels,' 'transitions,' 'transition probabilities.'

The perseverance in this way of thinking is understandable, because the great and genuine successes of the idea of energy parcels has made it an ingrained habit to regard the product of Planck's constant  $h$  and a frequency as a bundle of energy, lost by one system and gained by another. How else should one understand the exact dove-tailing in die great 'double-entry' book-keeping in nature? I maintain that it can in all cases be understood as a resonance phenomenon. One ought at least to try, and look upon atomic frequencies just as frequencies and drop the idea of energy-parcels. I submit that the word 'energy' is at present used with two entirely different meanings, macroscopic and microscopic. Macroscopic energy is a 'quantity-concept' (Quantitätsgrösse). Microscopic energy meaning  $h\nu$  is a 'quality-concept' or 'intensity-concept' (Intensitätsgrösse) it is quite proper to speak of high-grade and low-grade energy according to the value of the frequency  $\nu$ . True, the macroscopic energy is, strangely enough, obtained by a certain weighted summation over the frequencies, and in this relation the constant  $h$  is operative. But this does not necessarily entail that in every single case of microscopic interaction a whole portion  $h\nu$  of *macroscopic* energy is exchanged. I believe one is allowed to regard microscopic interaction as a continuous phenomenon without losing either the precious results of Planck and Einstein on the equilibrium of (macroscopic) energy between radiation and matter, or any other understanding of phenomena that the parcel-theory affords.>>

"Das angebliche Energiegleichgewicht - eine Resonanzerscheinung

Was ich hier betonen will - wenn Wörter etwas bedeuten und wenn gewisse Wörter nun im allgemeinen Gebrauch wirklich meinen was sie sagen: Das Superpositionsprinzip überbrückt nicht nur die Kluft zwischen den 'stationären' Zuständen und erlaubt Zwischenzustände ohne die Diskretheit der Energiestufen abzuschaffen, sondern es erübrigt die stationären Zustände. Niemand wäre geneigt anzunehmen, dass ein wellenmechanisches System irgend eine besondere Frequenz bevorzugt, es sei denn er ist durch die Planck-Einstein-Bohr-Theorie

vorbelastet. Dennoch wird das immer wieder durch die Wörter 'Energienstufen', 'Übergänge' und 'Übergangswahrscheinlichkeiten' impliziert."

<< The one thing which one has to accept and which is the inalienable consequence of the wave-equation as it is used in every problem, under the most various forms, is this: that the interaction between two microscopic physical systems is controlled by a peculiar law of resonance. This law requires that the *difference* of two proper frequencies of the one system be equal to the difference of two proper frequencies of the other:

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2 \dots (1)$$

The interaction is appropriately described as a gradual change of the amplitudes of the four proper vibrations in question.

People have kept to the habit of multiplying this equation by  $h$  and saying it means, that the first system (index 1) has dropped from the energy level  $hv_1$  to the level  $hv_1'$ , the balance being transferred to the second system, enabling it to rise from  $hv_2$  to  $hv_2'$ . This interpretation is obsolete. There is nothing to recommend it, and it bars the understanding of what is actually going on. It obstinately refuses to take stock of the principle of superposition, which enables us to envisage simultaneous gradual changes of any and all amplitudes without surrendering the essential discontinuity, if any, namely that of the frequencies. To be accurate we must add, that the condition of resonance, equation (1), may include three or more interacting systems. It may for example read

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2 + v_3' - v_3 \dots (2)$$

Moreover we may adopt the view that the two or more interacting systems are regarded as *one* system. One is then inclined to write equations (1) and (2), respectively, as follows

$$v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \dots \dots \dots (1')$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_1' + v_2' + v_3' \dots \dots (2')$$

and to state the resonance condition thus : the interaction is restricted to constituent vibrations of the *same* frequency. This is a familiar state of affairs, of old. Unfamiliar is the tacit admission that frequencies are *additive*, when two or more systems are considered as forming *one* system. It is an inevitable consequence of wave mechanics. Is it so very repugnant to common sense? If I smoke 25 cigarettes per day, and my wife smokes 10, and my daughter 12 - is not the family consumption 47 per day - on the average?>>

So einfach ist das also: Der Energieerhaltungssatz ist "in Wirklichkeit" ein Frequenzerhaltungssatz! Und wenn man die Frequenzen mit  $h$  multipliziert, kommt man von der Wellenmechanik in die Quantenmechanik...

Hören Sie Schrödingers [Credo](#) zum Quantensprung: "... nicht wirklich an ihn glaubt, sondern ersetzt durch die Resonanz zwischen Schwingungsfrequenzen". [Weitere Hörbeispiele](#)

Ein letztes Zitat:

<<4 A Typical Experiment

Jokes aside, I wish to consider some typical experiments that ostensibly force the energy parcel view upon us, and I wish to show that this is an illusion. A beam of cathode rays of uniform velocity, which can be gradually increased, is passed through sodium vapour. Behind the vessel containing the vapour the beam passes an electric field which deflects it and tells us the velocity of the particles after the passage. At the same time a spectrometer inspects the light, if any, emitted by the vapour. For small initial velocity nothing happens: no light, no change of velocity in the cathode beam. But when the initial velocity is increased beyond a sharply defined limit, two things happen. The vapour begins to glow, radiating the frequency of the first line of the 'principal series'; and the beam of cathode rays emerging from the vapour is split into two by the deflecting electric field, one indicating the initial velocity unchanged, and another slow one has 'lost an amount of energy' equal to the frequency of the said spectral line multiplied by Planck's constant  $h$ . If the velocity is further increased the story repeats itself when the incident cathode ray energy increases beyond the 'energy level' that is responsible for the second line (or rather the 'level-difference' in question) this line appears and a third beam of cathode rays with correspondingly reduced speed occurs; and so on. This was, and still is, regarded as blatant evidence of the energy parcel view.

But it is just as easily understood from the resonance point of view. A cathode ray of particles with uniform velocity is a monochromatic beam of de Broglie waves.>>

Spaß beiseite: Wie lange wird es noch dauern, bis der Quantensprung endet? Wann erinnern wir uns wieder an unseren kulturellen Hintergrund? Und an die Bedeutung der Wörter?

Zusammenfassung:

Summarising: the current view, which privileges the 'sharp energy states', is self-contradictory, anyhow in the language it uses

(what people mean, when they say something else than they mean, is difficult to guess). We found it self-contradictory in that it cannot be maintained for both the whole and the parts; we are left to choose and to apply the privilege the way it is most convenient. We found a minor inconsistency in the apparently innocent statement that two systems (both of sharply defined energy) approach each other and collide. This seems a little less obnoxious, because it can be evaded by saying : Oh well, we do not mean really quite sharp. Some may consider this point a rather gratuitous nagging. I wonder whether in actual collision problems it is entirely irrelevant.

© 07.07.2005, 13.11.2011

Fortsetzung:

[Are There Quantum Jumps? Part II](#)

The British Journal for the Philosophy of Science, 3, (1952), 233-242 [B 12]

[More quantum jumps!](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Are There Quantum Jumps?

## Part II

In [Are There Quantumjumps? Part I](#) zeigt Schrödinger, dass es keine Quantensprünge gibt. Im zweiten Teil beschäftigt er sich vor allem noch einmal mit dem "kulturellen Hintergrund":

## Are There Quantum Jumps? Part II

E. Schrödinger

The British Journal for the Philosophy of Science, 3, (1952), 233-242 [B 12]

## ARE THERE QUANTUM JUMPS?

## PART II

E. SCHRÖDINGER

7 *The Cultural Background, Again*

It might be maintained that the case I am making in this essay is quite irrelevant. It might be said that the 'privilege' is not meant seriously, that I am naïvely taking it at its face value. We may, so my opponent might continue, use the pure energy states of *any* system; just take our choice so that they are convenient to handle analytically. Any state of any system may be regarded as some superposition of some or all of its proper modes (= pure energy states). One may deal with them separately, *as if* the system was in one of them; the several results, duly superposed, will then tell us what would come of their superposition, if we really want to know. Perhaps my supposed opponent would even grant that he is using just a convenient shorthand, the same as in chemistry and statistical thermodynamics; but he would maintain that this is perfectly admissible also for investigating a single event of interaction between micro-systems.

Mit dem 'Privileg' sind die "stationären Zustände" mit scharfer Energie gemeint, die es eben so wenig gibt wie den Quantensprung. Sie sind nur eine wichtige Rechenhilfe, wenn man (wie es Schrödinger als erster selbst tat) Zustände von Atomen analytisch (mit mathematischen Funktionen) beschreiben will. In Wirklichkeit hält sich ein Atom nur vorübergehend in diesen "stationären Zuständen" auf und geht je nach "Lebensdauer eines Zustands" recht schnell in den stabilen Grundzustand (niedrigste Energie) über (wenn man von metastabilen Zuständen absieht). Beim Übergang befindet es sich aber nicht für die Lebensdauer im angeregten (energetisch höheren) Zustand und springt dann in den niedrigeren Zustand, sondern es befindet sich in einer Überlagerung der beiden (oder mehrerer) Zustände. Die stationären oder privilegierten Zustände sind also nur eine bequeme Abkürzung (in der Sprechweise mancher Physiker). Diese bequeme Abkürzung hat aber für das Verständnis der Physik durch "Nichtphysiker" fatale Folgen:

To this I have two answers, referring to two very different points. The first is this. Even if this shorthand were admissible for the micro-event, we have to keep in mind that physicists are not the only people interested in physics and in the outcome of theoretical research in physics. Those results that are tenable and will survive are destined, eventually, to be absorbed into our world picture and to become part and parcel thereof. A great many of our educated contemporaries, not equipped with the mathematical apparatus to follow our more technical deliveries, are yet deeply concerned with many general questions; one of the most stirring among them certainly is whether actually *natura facit saltus* or no. Whatever abbreviated language we physicists may find convenient to use among ourselves, we ought to be aware of the dilemmas that justly and duly interest others; we must be careful not to veil or distort them by indulging in loose speech. It is this point that I had in mind in my general historical introduction.

Die abkürzende Sprechweise hat (bis heute!) überlebt und bei vielen ein neues Weltbild geprägt: Seit wir die Quantenphysik entdeckt haben macht die Natur Sprünge (*natura facit saltus*) - in loose speech!

Science is not a soliloquy. It gains value only within its cultural milieu, only by having contact with all those who are now, and who in future will be, engaged in promoting spiritual culture and knowledge. The extant scientific papers of Archimedes, the dialogues and discourses of Galileo, are still of genuine interest in our day, and not only to philologists, but to many scientists. Would it mean setting ourselves too high and too proud a goal, if we occasionally thought of what will have become of our scientific papers 2,000 years hence? Science will have changed entirely. Will there be anybody to grasp our meaning, as we grasp the meaning of Archimedes?

Nun ja - in 2000 Jahren wird der Quantensprung wohl zu Ende gesprungen sein! Hier ist noch eine interessante Passage:

It may be asked: what difference does this make? Could it be tested by experiment?—The main difference is that it is reasonable, while it is unreasonable to admit a sharp count  $N$  of objects that avowedly lack individuality.<sup>1</sup> Secondly, this is the obvious way of registering the fact, that we *never* experiment with just *one* electron or atom or (small) molecule. In thought-experiments we sometimes assume that we do; this invariably entails ridiculous consequences as, e.g. that a spherical de Broglie wave, which is supposed to represent 'one' electron, moving in an 'unknown' direction, suddenly collapses into a small wave parcel, when 'that' electron is detected at a definite spot. Nothing of the sort happens if the number 'one' is not ascertained, but may as well be zero or two or three. Even better: the certain detection of one does not reduce the expectation of a second or third, it leaves it unchanged, according to generally accepted principles of statistics. And, I do not regret to say, we sorely need those spherical waves as realities (not merely as expressing our lack of knowledge), if we wish to account, e.g. for G. P. Thomson's beautiful experiments on the interference patterns of de Broglie waves, diffracted by crystals; and the same in many, many other cases.

Aus den Gedankenexperimenten sind nach 60 Jahren reale Experimente geworden: Man kann nicht erst heute (2012) sehr wohl mit einzelnen Elektronen und Atomen experimentieren (Stichwort: [Paulifalle](#)). Aber auch bei diesen Experimenten hat man keinen Kollaps gefunden, sondern ist inzwischen in der Lage "Filme im Mikrokosmos zu drehen", die einen kontinuierlichen Ablauf des Geschehens zeigen. Der Rekord liegt derzeit bei einer Auflösung von Zeptosekunden ( $10^{-21}$  s). Aber wir wollen es Schrödinger nicht übel nehmen, dass er bei seiner Argumentation eine Anleihe bei der "statistischen Interpretation" seiner Opponenten gemacht hat, die ja auch stimmt, wenn es um Mittelwerte geht...

© 20.11.2011

Siehe auch

[Are There Quantum Jumps? Part I](#)

[More quantum jumps!](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Korrespondenzprinzip (Bohr)

Mit der Kopplungskonstanten  $\kappa$  gilt für die Kreisbewegung eines Elektrons im Coulombfeld:

$$Z_{\text{en}} := \frac{\kappa}{r^2} = m r \omega^2$$

$$Z_{\text{en}} := \frac{\kappa}{r^2} = m r \omega^2 \quad (1)$$

also *Coulombkraft* = *Zentripetalkraft*. Wird der Drehimpuls gequantelt (erstes Bohrsches Postulat)

$$Dq := m r^2 \omega = n \cdot \hbar$$

$$Dq := m r^2 \omega = n \hbar \quad (2)$$

so sind nur noch Bahnen mit diesen Radien und (Kreis-) Frequenzen 'erlaubt':

`op(op(solve({Zen, Dq}, [r, omega])))`

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{\kappa m}, \quad \omega = \frac{m \kappa^2}{n^3 \hbar^3} \quad (3)$$

Bei der Bewegung im Zentralfeld ist der Betrag der gesamten Energie gleich der kinetischen Energie:

$$E = \frac{m}{2} (r^2 \cdot \omega^2)$$

$$E = \frac{m r^2 \omega^2}{2} \quad (4)$$

Also sind mit den quantisierten Werten von oben nur folgende Energien 'erlaubt' ('stationäre Zustände'):

`subs(E = E_n (3), (4))`

$$E_n = \frac{m \kappa^2}{2 n^2 \hbar^2} \quad (5)$$

Nach dem zweiten Bohrschen Postulat (Frequenzbedingung) gehören dazu die Frequenzen

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$$

(6)

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$$

Genau genommen ist das nicht die Frequenzbedingung, sondern Einsteins Gleichung  $E = h f$ ; die Frequenzbedingung meint die Differenz zweier solcher Frequenzen (oder Energien). Jedenfalls gilt dann für die Frequenzen:

$$\omega_n := n \rightarrow \frac{m \cdot \kappa^2}{2 \cdot \hbar^3 \cdot n^2} : \omega(n) = \omega(n)$$

$$\omega_n = \frac{m \kappa^2}{2 \hbar^3 n^2} \quad (7)$$

was sich allerdings von den oben berechneten Frequenzen um den Faktor  $n/2$  unterscheidet. Stehen also die beiden Bohrschen Postulate im Widerspruch? Nein und Ja!

Nein: Sowohl Drehimpuls als auch Energie lassen sich quantisieren.

Ja: Aber nicht mit der Bewegung klassischer Teilchen.

Wir bohren ein Schlupfloch aus der Misere ("Korrespondenzprinzip") und rechnen in atomaren Einheiten.

$$m, \hbar, \kappa := 1, 1, 1$$

$$m, \hbar, \kappa := 1, 1, 1 \quad (8)$$

Dann ist die Frequenz der Überlagerung von zwei nicht stationären Zuständen mit den Quantenzahlen  $n$  und  $n+k$  (Frequenzbedingung):

$$\omega_{nk} := \omega(n) - \omega(n+k)$$

$$\omega_{nk} := \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+k)^2} \quad (9)$$

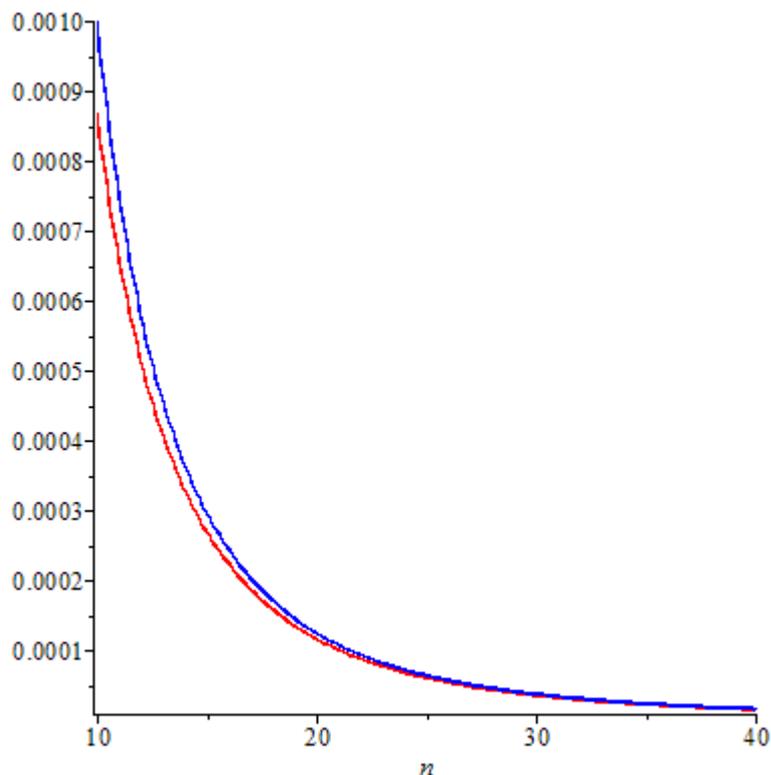
Oder für große Quantenzahlen

$$\text{asympt}(\omega_{nk}, n);$$

$$\frac{k}{n^3} - \frac{3k^2}{2n^4} + \frac{2k^3}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad (10)$$

was der klassischen Umlauffrequenz ( $\sim 1/n^3$ , blau) 'korrespondenzmäßig entspricht' ( $k = 1$ ):

$$\text{plot}\left(\left[\text{subs}(k=1, \omega_{nk}), \frac{1}{n^3}\right], n=10..40, \text{color}=[\text{red}, \text{blue}]\right)$$



Und die Moral von der Geschichte? Trau den Apostulaten nicht:

Es kann keinen Quantensprung geben, weil die Frequenz der emittierten Strahlung die Differenzfrequenz der 'stationären' Zustände ist. Würde der Übergang sprunghaft erfolgen, könnte keine Differenzfrequenz zustande kommen.

Es kann aber auch keine stationären Zustände geben, weil sonst das Elektron springen müsste :-)). Und der Grundzustand? Ist auch nicht zu 100% stabil (Elektroneneinfang). Man munkelt, dass die 99,99.% der stabilen Atome durch das Vakuum stabilisiert werden. Oder sich einfach an Bohrs Postulate halten?

Schrödingers Zusatz: Weshalb ergibt sich bei der Überlagerung von zwei Zuständen die Differenzfrequenz?

$$\psi = a \cdot \exp(i \cdot \omega_1 \cdot t) + b \cdot \exp(i \cdot \omega_2 \cdot t)$$

$$\psi = a e^{i \omega_1 t} + b e^{i \omega_2 t} \quad (11)$$

$$\text{abs}(\psi)^2 = \text{evalc}(\text{abs}(\text{rhs}(\%)))^2$$

$$|\psi|^2 = (a \cos(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t))^2 + (a \sin(\omega_1 t) + b \sin(\omega_2 t))^2 \quad (12)$$

combine % )

$$|\psi|^2 = a^2 + 2 a b \cos(\omega_1 t - \omega_2 t) + b^2 \quad (13)$$

Also alles nur eine Schwebung?

Siehe auch: [Kleine Quantenzahlen](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

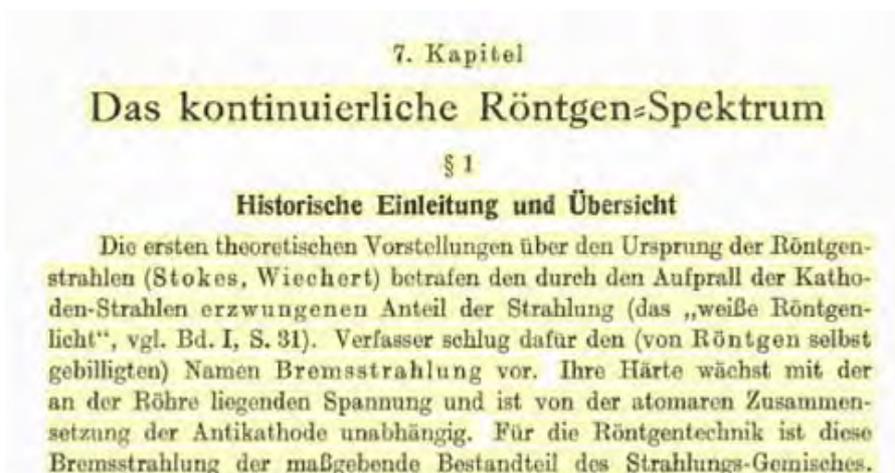
[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Über die Ursprünge des Quantensprungs

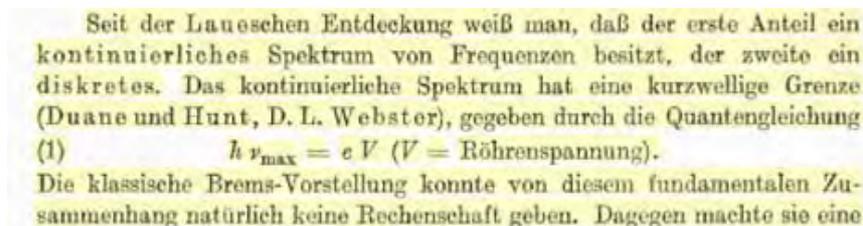
Wie auch große Geister im Dunkeln tappen, wenn Experimente etwas völlig Neues ans Tageslicht bringen...

Zitate (gelb) aus Arnold Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien II. Band, S. 495 ff., Vieweg & Sohn 1967



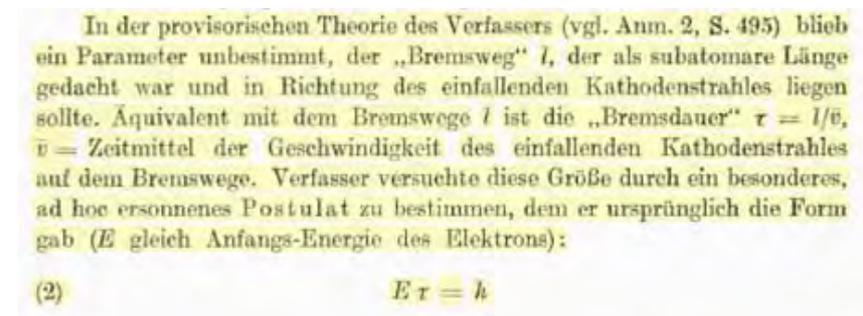
Vorweg eine Anmerkung zum Begriff "Bremsstrahlung" (klassische Beschreibung): Ein freies Elektron wird beim Vorbeiflug am Atomkern bis zum Scheitel der Hyperbelbahn (Perihel) beschleunigt und dann wieder abgebremst. Verliert es dabei insgesamt keine Energie, so wird es elastisch gestreut und ändert nur seine Richtung ("[Rutherfordstreuung](#)"). Dies ist der weitaus häufigste Prozess, der aber hier nicht gemeint ist. Bremsstrahlung bedeutet, dass das Elektron Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung abgibt, also nach dem "inelastischen Stoß" langsamer ist als vorher.

Vor etwa 100 Jahren (1911) waren die theoretischen Physiker mit einem Problem konfrontiert, das sich nicht mit der klassischen Elektrodynamik lösen ließ: Eigentlich müsste eine einmalig beschleunigte (gebremste) Ladung (Kathoden-Strahlen = Elektronen) ein kontinuierliches Spektrum (= weißes Röntgenlicht) elektromagnetischer Wellen abstrahlen, in dem beliebig hohe Frequenzen vorkommen. Aber das Spektrum der Bremsstrahlung hat eine "kurzwellige Grenze", bzw. eine maximale Frequenz, für die eine "Quantengleichung" gilt:



Das ist ja auch vernünftig, denn mehr als die kinetische Energie des Elektrons kann bei der Bremsung nicht abgestrahlt werden. Das Problem ist nur: Warum gibt es eine obere Schranke für die *Frequenz* der Strahlung?

"Der Verfasser" (= Sommerfeld) entwarf eine provisorische Theorie:



Mit diesem "ad hoc ersonnenen Postulat" erhielt Sommerfeld auch die richtige Größenordnung der abgestrahlten Intensität der Bremsstrahlung, aber das Problem der kurzwelligen Grenze war damit nicht gelöst. Auch Einsteins Vorschlag, "das Quantenmäßige in die Strahlung zu verlegen", führte nicht zum Erfolg:

Als Verfasser diese Ansätze auf dem ersten Solvay-Kongreß (1911) vortrug, machte Einstein dazu eine interessante Bemerkung: Er schlug als Alternative vor, das Quantenmäßige in die Strahlung zu verlegen und den Bremsprozeß unbestimmt zu lassen [während bei der vorstehenden Rechnung umgekehrt das Quantenmäßige in den Atomprozeß gelegt war, Gl. (2), und die Strahlung klassisch gelassen war, Gl. (3)]. Man kann z. B. mit Einstein den Bremsprozeß als plötzlich annehmen, also das nebenstehende Bild benutzen. Dasselbe liefert, in einem beliebigen Zeitintervall  $T$  nach Fourier entwickelt:

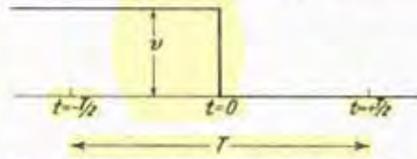


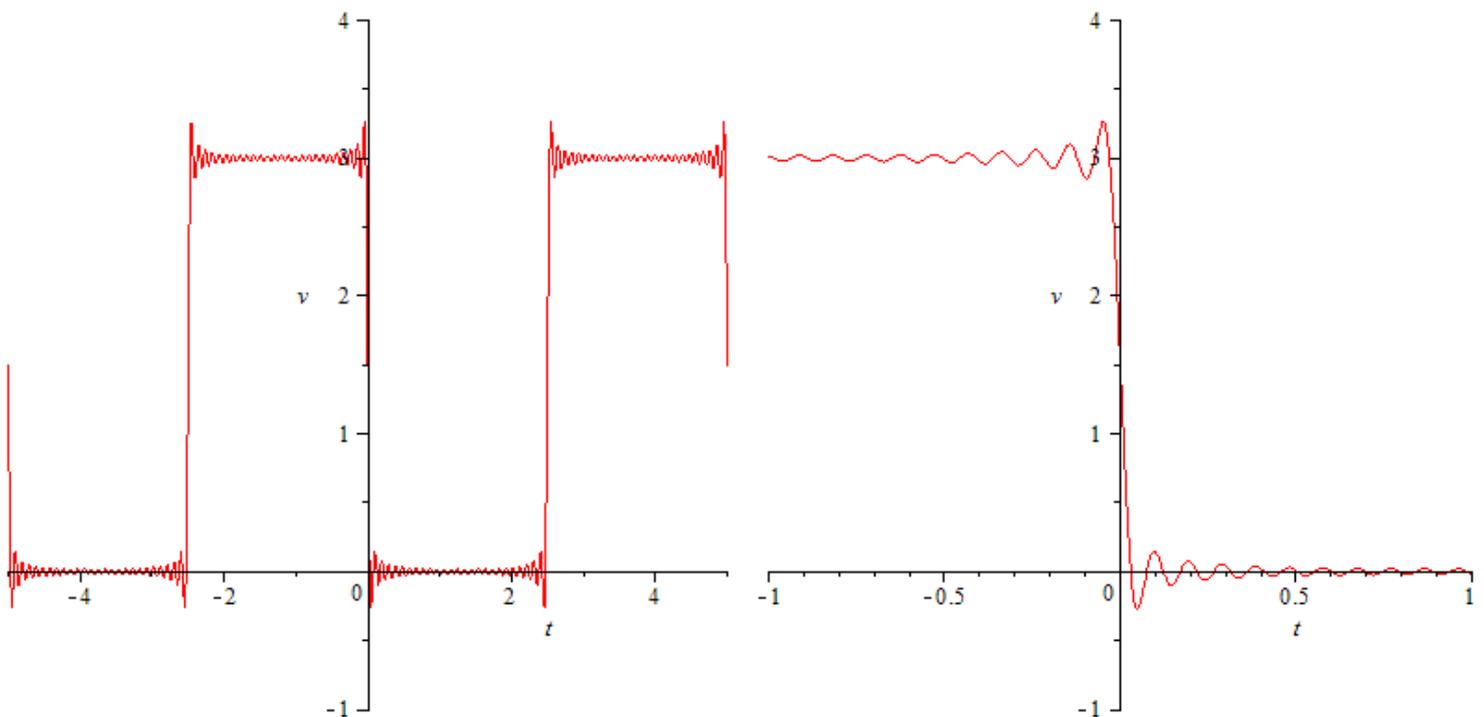
Fig. 29. Fourier-Entwicklung eines plötzlichen Brems-Prozesses nach Einstein.

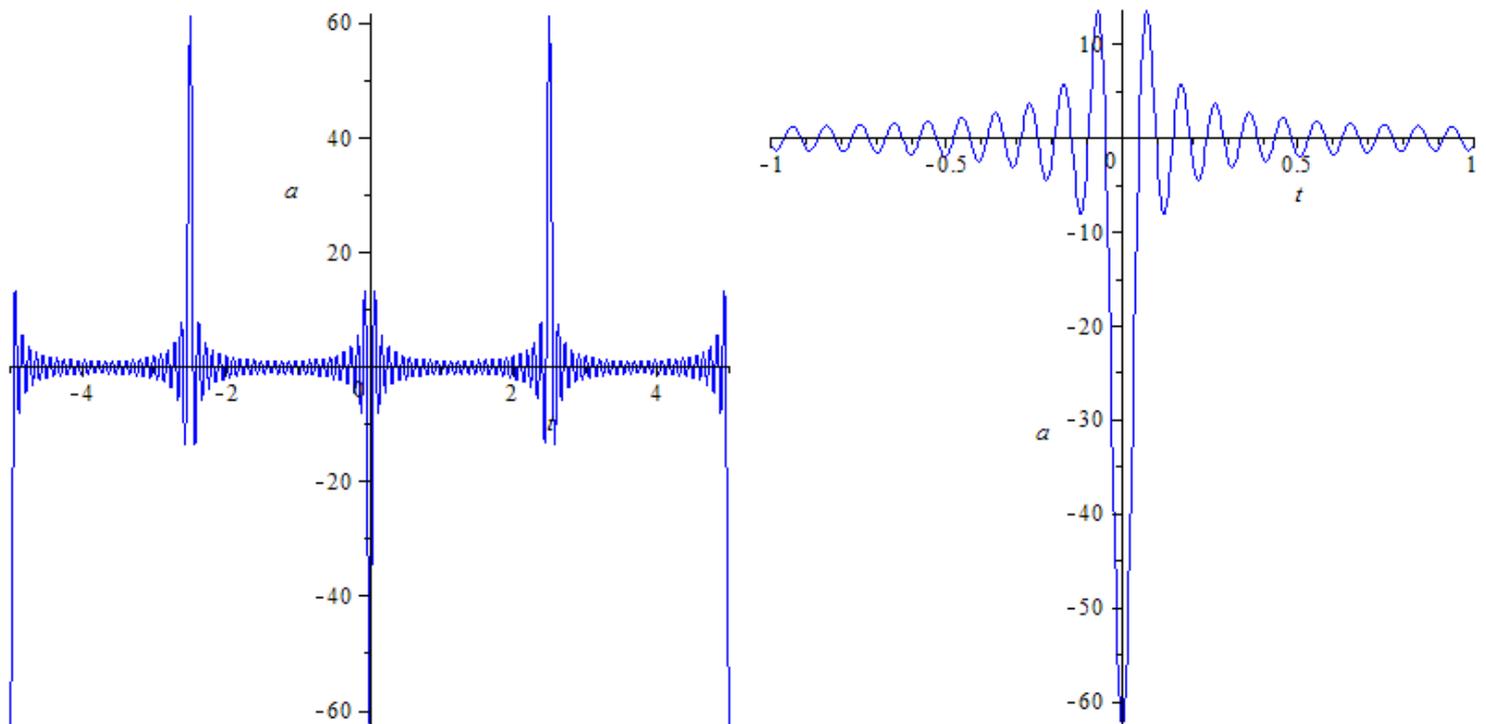
$$(4) \quad v(t) = \frac{v}{2} - \frac{2v}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n t}{T}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach  $t$  eine offenbar divergente Reihe. Einstein schneidet sie zum Zwecke der Strahlungs-Berechnung bei einem gewissen Gliede  $n = N$  ab und schreibt

$$(4a) \quad \dot{v}(t) = -\frac{4v}{T} \sum_{n=1,3,\dots,N} \cos \frac{2\pi n t}{T},$$

Das ist auch nicht verwunderlich, denn eine "plötzliche Abbremsung" (also ein Sprung der Geschwindigkeit von  $v$  auf 0) bedingt eine unendliche Beschleunigung, also eine divergente Reihe für die Beschleunigung. Man muss sich vielmehr wundern, wie Einstein solch ein "spukhaftes Verfahren" vorschlagen konnte. Damit würden die Geschwindigkeit  $v(t)$  (rot) und die Beschleunigung  $a(t)$  (blau) etwa so aussehen:





Für die Darstellung wurde  $T = 5$  (passende Einheit) und  $N = 50$  (siehe unten) gewählt. Im Zoom der rechten Spalte sieht man, dass das einer maximalen Frequenz von 10 (passende Einheit) entspricht.

Abgesehen davon, dass eine Fourier-Reihe (diskrete Frequenzen) immer einen periodischen Vorgang und nicht eine einmalige Bremsung beschreibt, ist Einsteins Vorschlag in sich widersprüchlich:

indem er annimmt, daß die höheren Glieder  $n > N$  nichts zur Strahlung beitragen.

Die Grenze  $N$  wird nun folgendermaßen bestimmt: Ersichtlich ist die Schwingungszahl  $\nu$  des einzelnen Fourier-Gliedes gegeben durch

(4b) 
$$\nu = \frac{n}{T}.$$

Die maximale Schwingungszahl, die bei der Anfangs-Energie  $E$  zur Verfügung steht, sei bestimmt durch das Quanten-Postulat

(4c) 
$$E = h \nu_{\max}.$$

Diesem  $\nu_{\max}$  entspricht nach (4b) ein  $n_{\max}$ , welches eben die fragliche Grenze  $N$  liefert, nämlich

(4d) 
$$N = \frac{E}{h} T.$$

Wenn man eine Rechtecksfunktion ("plötzlichen Sprung") durch eine Fourierreihe approximieren will, benötigt man beliebig hohe Frequenzen, was auch durch Einsteins Annahme, dass "Reihenglieder nichts zur Strahlung beitragen", nicht zu beheben ist, wenn man "das beliebige Zeitintervall  $T$ " beliebig groß wählt.

Deshalb schreibt Sommerfeld auch:

Wir haben diese etwas kühne Einsteinsche Methode des Abschneidens hier angeführt, weil sie das erste Beispiel ist für ein Verfahren, welches seitdem — in Ermangelung von etwas Besserem — immer dann angewendet wird, wenn man auf divergente Ausdrücke geführt wird (insbesondere in der Diracschen Theorie der negativen Energie-Niveaus, vgl. Kap. IV, S. 313 (von Pauli gelegentlich etwas abschätzig als „Subtraktions-Physik“ bezeichnet). —

Man sollte also die 100 Jahre alten "ad hoc Quanten-Postulate", die "kühnen Methoden", die "Verfahren in Ermangelung von etwas Besseren", die "Subtraktionsphysik" und den Quantensprung nicht immer wieder aus der Mottenkiste holen, zumal den großen Geistern schon damals klar war, dass man eine neue Theorie benötigt. Sie hieß damals Wellenmechanik:

Wellenmechanisch wird der Anfangszustand des Systems dargestellt durch eine aus dem Unendlichen kommende, unendlich ausgebreitete ebene Welle, die an dem Coulomb-Felde des Kerns gestreut wird. Die Frage, ob das Atom von dem Elektron zentral oder peripher getroffen wird, tritt gar nicht auf. Alle individuellen Möglichkeiten des Zusammenstoßes werden in einem einheitlichen Wellenbild zusammengefaßt.

Ebenso wird der Endzustand, in dem das Elektron mit verringerter Geschwindigkeit das Atom verläßt, durch eine ebene Welle beschrieben, ebenfalls gebeugt am Atomkern. Die Fortschrittrichtung der Welle, d. i. die Richtung des austretenden Elektrons, bleibt unbestimmt; jede Richtung ist a priori gleich wahrscheinlich mit jeder anderen.

Um nun die Intensität der Ausstrahlung beim Übergang aus dem Anfangs- in den Endzustand zu berechnen, hat man nur die zugehörigen Wellenfunktionen nach dem Formalismus des Matrix-Elementes zu kombinieren. Über die Art des Überganges braucht dabei nichts vorausgesetzt zu werden, ebensowenig wie in der Theorie der Linienspektren der Übergang aus dem Anfangs- in den Endzustand spezifiziert zu werden braucht.

Der Unterschied dieser wellenmechanischen Methode gegenüber der klassisch-korrespondenzmäßigen springt in die Augen: Bei letzterer haben wir eine Ausstrahlung, die aus der jeweils herrschenden Geschwindigkeitsänderung längs der klassischen Bahn (einer Hyperbel) kausal bestimmt ist, bei ersterer dagegen genügt die Gegenüberstellung von Anfangs- und Endzustand, wobei der Ursprung der Strahlung im Dunkeln bleibt. Man beachte insbesondere auch folgendes: Im Matrixelement wird über den ganzen

In dieser Theorie gibt es keine klassischen Bahnen, sondern nur Zustände, die der deterministischen Schrödingergleichung gehorchen. Im vorliegenden Fall (Bremsstrahlung, kontinuierliches Spektrum) sehen diese Zustände etwa so aus: [Bremsstrahlung](#).

Die Wellenmechanik (oder allgemeiner die Quantentheorie) "stellt diese Zustände gegenüber", d.h., man berechnet durch die Projektion des Anfangszustands auf den Endzustand (Matrixelement) die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang, wobei der Ursprung der Strahlung im Dunkeln bleibt! (So gesehen ist also die Quantentheorie eine phänomenologische Theorie ;-).

Im Falle eines diskreten Spektrums sehen die Zustände etwa so aus: "[Atombau und Spektrallinien](#)".

In beiden Fällen - kontinuierliches oder diskretes Spektrum - gilt: Die Frequenz der Strahlung ist gleich der Differenzfrequenz der Anfangs- und Endzustände, also der "Frequenzerhaltungssatz". Wenn also der Endzustand die Frequenz 0 hat ("im Unendlichen ruhendes Elektron"), dann hat die Strahlung die maximale Frequenz (oder gesamte Energie) des Anfangszustandes. Interessant dabei ist - sehr verkürzt gesagt -, dass sich die Differenzfrequenz durch die Überlagerung (mathematisch: Betragsquadrat der Summe) der Zustände ergibt und die Übergangswahrscheinlichkeit durch die Projektion (mathematisch: Skalarprodukt).

Aber bis heute sagt die Quantentheorie nichts über den zeitlichen (oder gar kausalen) Ablauf des Übergangs aus und man lebt mit diesem unbefriedigenden Zustand, nämlich den "zwei Dynamiken":

1. Die Zustände (und ihre Überlagerung) entwickeln sich deterministisch.
2. Bei einer "Messung", also der Feststellung, dass ein Übergang stattgefunden hat, "kollabieren die Zustände" - stochastisch.

Wobei die zweite "Dynamik" eigentlich von niemandem ernst genommen wird. Es gibt nicht einmal eine Gleichung dafür und Feynman nennt den "Kollaps" eines Zustandes "a nightmare". In Ermangelung von etwas Besserem postuliert man aber manchmal noch heute, dass die Änderung plötzlich erfolgt: Bohrs Postulate haben wirklich eine spukhafte Fernwirkung über 100 Jahre!

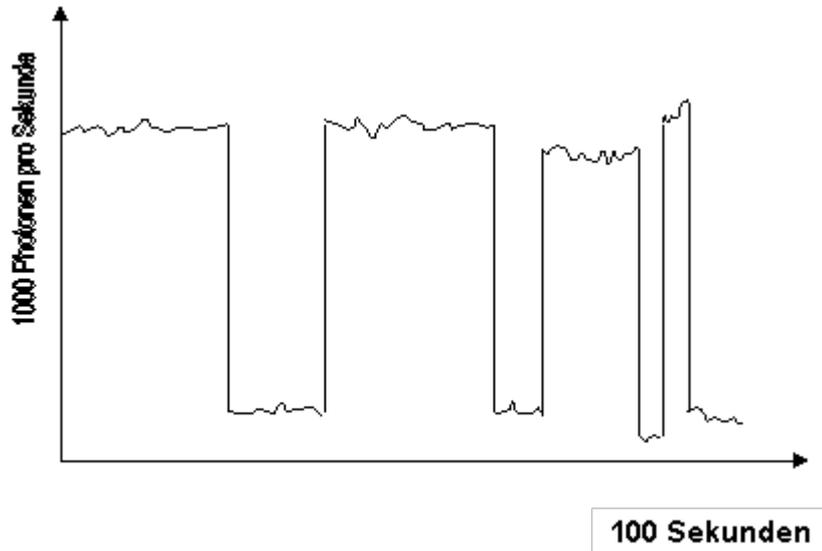
Mit aktuellen Experimenten (2011) ist man allerdings in der Lage, die Bewegung von Elektronen in immer kürzeren Zeitintervallen zu verfolgen. Die Zeitauflösung wird derzeit von Attosekunden auf Zeptosekunden geschraubt. Und bis heute hat noch niemand einen Quantensprung oder einen Kollaps in Null Sekunden beobachtet!

Siehe auch:

- Sommerfeld, [kommentiertes Original](#)
- Schrödinger: [Are there quantum jumps?](#)
- [Korrespondenzprinzip](#)
- [Elementarprozesse der Bremsstrahlungserzeugung](#)
- [Moderne Physik](#) mit Maple

## Nicht aufgelöste Quantensprünge

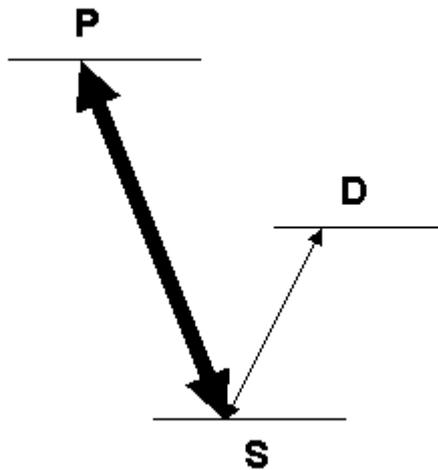
In den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts hat man gelernt, mit einzelnen Atomen und Ionen zu experimentieren (nicht nur damals höchste Experimentierkunst! -> [Paul-Falle](#)) und hat etwa folgende Signale der Resonanzfluoreszenz aufgenommen (Prinzipiskizze):



Aus den scheinbar sprunghaften Änderungen des Signals (symbolisiert durch die senkrechten Geradenstücke) schloss man auf den direkten Nachweis von "Quantensprüngen" eines einzelnen Atoms (Ions). Eine sehr mutige Extrapolation bei etwa 10 "Quantensprüngen" in 100 Sekunden! Abgesehen davon, dass es nicht nur experimentell sondern auch theoretisch unmöglich ist, eine Zeitmessung mit unendlich hoher Genauigkeit zu machen (ein Sprung dauert nun einmal nur 0.0 Sekunden und das ist zu scharf für die Energie-Zeit-Unschärferelation, weil dann die Energie der nachgewiesenen Photonen beliebige Werte annehmen müsste): Die Schwingungsdauer von Licht ist etwa eine Femtosekunde. Wenn man "Quantensprünge" vernünftig auflösen will, muss man mit einer Auflösung von Attosekunden arbeiten, was auch in modernen Experimenten geschieht. Dennoch sind die Experimente der "ersten Generation" sehr interessant:

Wie funktionieren diese Experimente?

Man nimmt sich ein Atom mit V-Konfiguration. Vom "Grundzustand" S gibt es einen starken Dipolübergang zum P-Zustand (kurze Lebensdauer), der in Resonanzfluoreszenz beobachtet wird und obiges Signal erzeugt. Wäre dies der einzige Übergang, so würde man eine in etwa konstante Zählrate der Photonen (in obiger Darstellung 1000/sec) beobachten.



Daneben gibt es aber auch noch einen schwachen Quadrupolübergang von S nach D (lange Lebensdauer). Durch Einstrahlung passender Photonen kann man diesen Übergang induzieren und das Elektron im Zustand D für längere Zeit parken (-> Dehmelt, "shelved electron"). Natürlich erlischt dann das Fluoreszenzsignal (Dunkelphasen) und setzt erst wieder ein, wenn das Elektron von D nach S zurückkehrt. Und weil das in obigem Zeitmaßstab (Sekunden) wie ein Sprung aussieht, schloss man wohl etwas voreilig auf den experimentellen Nachweis von "Quantensprüngen", die "sich instantan (also mit einer Dauer von 0.0sec) ereignen".

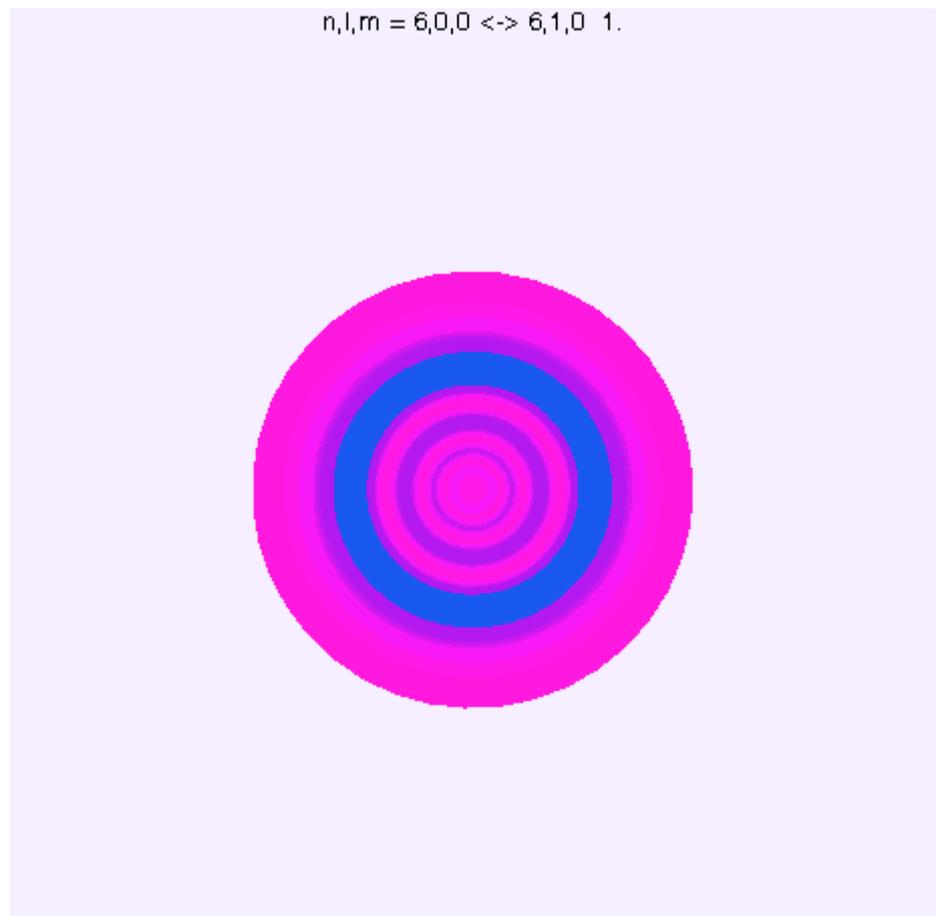
Was spielt sich tatsächlich ab?

Alle Animationen wurden mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung berechnet (H-Atom):

Der Übergang vom kugelsymmetrischen S-Zustand zur Dipolverteilung P sieht so aus (nebenstehende Animation). Die 100 Bilder des Films wurden dabei mit einem extremen Zeitraffer berechnet: In Wirklichkeit macht das Atom weit über  $10^{15}$  Schwingungen, wenn es von S nach P übergeht. Dabei ändert sich das Gewicht des Grundzustandes von 1 nach 0 (laufende Zahlen). (Durch die Wiederholung des Films scheint das Atom in den Grundzustand zurückzuspringen - aber keine Sorge, das hat noch niemand beobachtet ;-))

Der aufmerksame Beobachter stellt fest, dass die Kugelsymmetrie der S-Verteilung recht schnell verschwindet: Es genügt schon eine kleine Beimischung ( $\ll 1\%$ ) des P-Zustandes.

Der Übergang vom kugelsymmetrischen S-Zustand zur Quadrupolverteilung D sieht so aus (nebenstehende Animation). Die 100 Bilder des Films wurden dabei mit einem extremen Zeitraffer berechnet: In Wirklichkeit



macht das Atom weit über  $10^{15}$  Schwingungen, wenn es von S nach D übergeht (deshalb laufen Atomuhren auch so genau ;-)). Dabei ändert sich das Gewicht des Grundzustandes von 1 nach 0 (laufende Zahlen). (Durch die Wiederholung des Films scheint das Atom in den Grundzustand zurückzuspringen - aber keine Sorge, das hat noch niemand beobachtet ;-))

Der aufmerksame Beobachter stellt fest, dass die Kugelsymmetrie der S-Verteilung recht schnell verschwindet: Es genügt schon eine kleine Beimischung ( $\ll 1\%$ ) des D-Zustandes.

Das bedeutet auch, dass schon nach kurzer Zeit (ein paar Femtosekunden) die Ladungsverteilung im Atom ganz anders aussieht als beim S-P-Übergang. Ein Photon, das mit einem Dipolübergang in diesem Atom unterkommen will, hat keine Chance mehr! Natürlich kann man dies nicht mit Messungen, die über ein paar Millisekunden mitteln, nachweisen.

Die obigen 2D-Darstellungen zeigen nur einen Schnitt durch die Komplexität der Dynamik eines atomaren Übergangs. Wir können versuchen, eine Dimension weiterzukommen. Allerdings wird bei der 3D-Darstellung die Rechnung etwas aufwändiger, deshalb begnügen wir uns mit 20 Bildern.

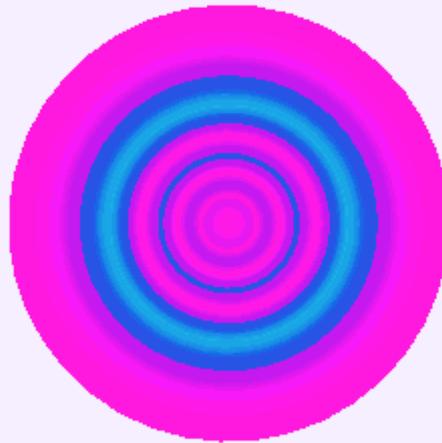
Aber auch mit dieser geringen Auflösung sieht man recht deutlich wie schnell ein Atom, das sich auf den Weg zu einer Quadrupolverteilung gemacht hat, für ein "Dipolphoton" unsichtbar wird. Wobei hier nicht berücksichtigt wurden:

Spin, Feinstruktur, Hyperfeinstruktur, und andere QED-Effekte...

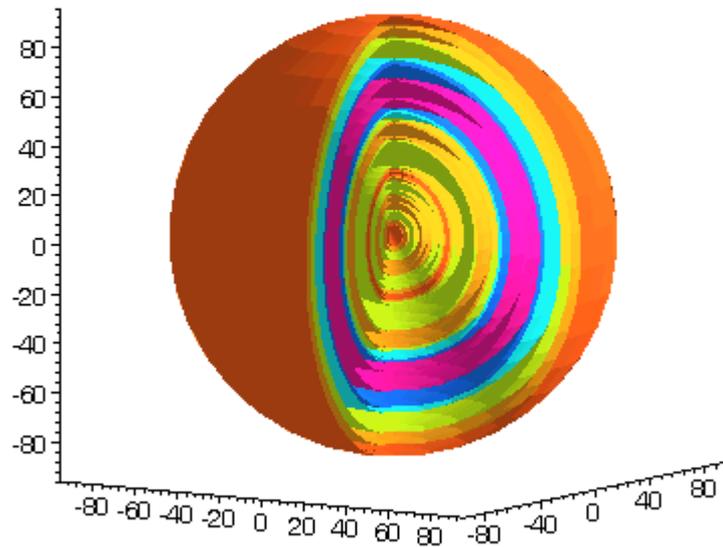
In other words:

Stellen Sie sich vor Sie wären ein Photon und hätten von der ewigen Raserei mit Lichtgeschwindigkeit genug. Wo unterkommen (ob Sie dabei endgültig Ihre Individualität verlieren, wollen wir hier nicht diskutieren)? Am besten nimmt man dafür ein naheliegendes Atom-Motel mit Kugelsymmetrie, denn dort kommt man immer und aus allen Richtungen unter. Wenn Sie allerdings ein Dipolphoton sind und zuvor ein Quadrupolgast auch nur leise angeklopft hat, haben Sie Pech gehabt, weil dann Ihr Schlüssel

$n, l, m = 6, 0, 0 \leftrightarrow 6, 2, 1$



$$n,l,m = 6,0,0 \leftrightarrow 7,2,1 \quad 1.$$



schlagartig nicht mehr passt. Dann können Sie nur noch aus der Ferne (etwa 300000km) zusehen wie sich das Quadrupolphoton gemütlich in seinem Bett ausbreitet.

- siehe auch [Quantensprung in Zeitlupe](#)  
[Übergänge eines Wasserstoffatoms](#)
- Literatur (Einstiegspunkte):
  - EXPERIMENTS WITH AN ISOLATED SUBATOMIC PARTICLE AT REST  
Nobel Lecture, December 8, 1989  
by  
HANS G. DEHMELT  
Department of Physics, University of Washington, Seattle, WA 98195, USA
  - QUANTUM MECHANICS WITH ONE, TWO, AND MANY ATOMS  
W. M. Itano, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger,  
and D. J. Wineland  
Time and Frequency Division, National Institute of Standards and Technology  
Boulder, Colorado, 80303 U.S.A.
  - Monitoring the Dipole-Dipole Interaction via Quantum Jumps of Individual Atoms  
C. Skornia†, J.von Zanthier, G.S. Agarwal‡, E. Werner†, H. Walther  
Max-Planck-Institut für Quantenoptik and Sektion Physik der LMU München, D-85748 Garching, Germany  
† Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Germany  
‡ Physical Research Laboratory, Navrangpura, Ahmedabad-380 009, India  
(June 7, 2005)

- Looking at the photodynamics of individual fluorescent molecules and proteins\*  
M. F. García-Parajó†, J.-A. Veerman, L. Kuipers, and N. F. van Hulst  
Applied Optics Group, Faculty of Applied Physics, MESA+ Research Institute,  
University of Twente, P.O. Box 217, 7500 AE Enschede, The Netherlands
- Observational line broadening and the duration of a quantum jump  
L S Schulman  
Physics Department, Clarkson University, Potsdam, NY 13699-5820, USA
- Continuous generation of single photons with controlled waveform in an ion-trap cavity system  
Matthias Keller<sup>1</sup>, Birgit Lange<sup>1</sup>, Kazuhiro Hayasaka<sup>2</sup>, Wolfgang Lange<sup>1</sup>  
& Herbert Walther<sup>1,3</sup>  
<sup>1</sup> Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Hans-Kopfermann-Strasse 1,  
85748 Garching, Germany  
<sup>2</sup> National Institute of Information and Communications Technology, 588-2  
Iwaoka, Nishi-ku, Kobe 651-2492, Japan  
<sup>3</sup> Sektion Physik der Universität München, Am Coulombwall 1, 85748 Garching, Germany
- Links: <http://www.physnet.uni-hamburg.de/ilp/toschek/ionen.html> (nicht mehr zu erreichen)  
Phys. Rev. Lett. 57, 1696 (1986): Observation of Quantum Jumps: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.1696>

'Moderne Physik mit Maple'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

Hier finden Sie alles zum Quantensprung!  
Ergebnis einer Google-Suche mit "site:mikomma.de  
quantensprung"

### [Quantensprung](#)

Der Quantensprung. Man redet heute oft vom Quantensprung. Vor allem Politiker und Esoteriker wollen damit sagen, dass es sich dabei um etwas ganz Besonderes ...

[www.mikomma.de/fh/hydrod/h71.html](http://www.mikomma.de/fh/hydrod/h71.html)

### [Quantensprung](#)

Weshalb Redner und Werbeagenturen trotzdem immer wieder den Quantensprung missbrauchen, z.B.: "So einen Sprung nach vorn gab es noch nie. ...

[www.mikomma.de/fh/hydrod/quantenspr.htm](http://www.mikomma.de/fh/hydrod/quantenspr.htm)

### [Quantensprung in Zeitlupe](#)

Und wo ist nun der Quantensprung geblieben? (Der Programmierer hat es so eingerichtet, dass er nicht stattfindet ;-)). Weitere Quantensprünge ...

[www.mikomma.de/fh/hydrod/hydoszi.htm](http://www.mikomma.de/fh/hydrod/hydoszi.htm)

### [Quantensprung](#)

7. Juni 2005 ... Nicht aufgelöste Quantensprünge. In den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts hat man gelernt, mit einzelnen Atomen und Ionen zu ...

[www.mikomma.de/fh/hydrod/qsp/dehmelt.htm](http://www.mikomma.de/fh/hydrod/qsp/dehmelt.htm)

### [Quantensprung und Strahlung](#)

Hier können Sie Übergänge eines Atoms (Wasserstoff) studieren:  $n'l'm \leftrightarrow n'l'm'$ . In allen Animationen sind 10 Schwingungen für die Absorption und anschließend

...  
[www.mikomma.de/fh/hydrod/qsp/ueberg.htm](http://www.mikomma.de/fh/hydrod/qsp/ueberg.htm)

### [Quantensprung](#)

Der EZB-Präsident fordert jetzt "einen Quantensprung in der gegenseitigen Überwachung der Wirtschaftspolitik in Europa". << ...

[www.mikomma.de/trichet.htm](http://www.mikomma.de/trichet.htm)

### [What is a photon?](#)

Das bedeutet einfach: Das Atom konnte seinen "Quantensprung" nicht zu Ende springen, weil das bei diesem "Quantensprung" abgestrahlte Photon vorher

zurück ...

[www.mikomma.de/photon/photon1.html](http://www.mikomma.de/photon/photon1.html)

## [Inhalt](#)

Quantensprung Zitate · Schrödingergleichung ·  
qph3htm/qph3a-Dateien/filelist.xml · qph3htm/qph3a-  
Dateien/oledata.mso · qph3htm/zustandsgl.mws ...

[www.mikomma.de/inhalt.htm](http://www.mikomma.de/inhalt.htm)

## [Korrespondenzprinzip](#)

Nur beim Übergang von einer Bahn zur anderen soll  
die Strahlung in einem spontanen Emissionsakt  
(Einsteins "Quantensprung") als Photon abgegeben  
oder ...

[www.mikomma.de/orbitals/korresp.htm](http://www.mikomma.de/orbitals/korresp.htm)

## [Atomphysik](#)

H-Orbitals II (statistische Interpretation). H-Orbitals  
III (Details). Quantensprung in Zeitlupe · Übergänge  
eines H-Atoms (ohne Quantensprung!) ...

[www.mikomma.de/fh/atom/atomph.htm](http://www.mikomma.de/fh/atom/atomph.htm)

## [Physik](#)

H-Orbitals III (Details). Elektrofluid (Strömungen im  
H-Atom) ! NEU. Quantensprung · Quantensprung in  
Zeitlupe · Quantensprung und Strahlung ...

[www.mikomma.de/fh/physik.html](http://www.mikomma.de/fh/physik.html)

## [Bremsstrahlung](#)

Der Quantensprung dauert im Prinzip ewig lang.  
Mindestens so lange bis das Elektron den Kern  
passiert hat (von  $-\infty$  bis  $+\infty$  :-)) ...

[www.mikomma.de/brems/brems.htm](http://www.mikomma.de/brems/brems.htm)

## [Planck](#)

Der Übergang von einer Bahn zur anderen geschieht  
im Bohrschen Atommodell mit einem Quantensprung,  
bei dem ein Photon (elektromagnetische Strahlung) ...

[www.mikomma.de/planck/planck1.html](http://www.mikomma.de/planck/planck1.html)

## [Quantum Jumps](#)

Die Bohrsche Sicht, die auch heute noch mit dem  
Quantensprung vermittelt .... Hören Sie Schrödingers  
Credo zum Quantensprung: "... nicht wirklich an ihn

...

[www.mikomma.de/schroe/quantumjumps.htm](http://www.mikomma.de/schroe/quantumjumps.htm)

## [Korrespondenzprinzip](#)

Wenn man den Übergang eines Systems nicht mit dem ominösen Quantensprung überspringt, sondern seine Dynamik mit Hilfe der Schrödingergleichung darstellt, ...

[www.mikomma.de/orbitals/korresp3.htm](http://www.mikomma.de/orbitals/korresp3.htm)

### [Laptop zum Spicken](#)

Dabei hat sich der Quantensprung fast unbemerkt vollzogen, so als hätten die Beteiligten noch Angst vor der eigenen Courage. Bilanz ziehen wollen die ...

[www.mikomma.de/ltopzeit.htm](http://www.mikomma.de/ltopzeit.htm)

### [Multipole](#)

aber bitte das Copyright nicht vergessen :-)).  
Verwandte Themen: H-Orbitals · Quantensprung ·  
Moderne Physik mit Maple ...

[www.mikomma.de/fh/eldy/multi/multi.html](http://www.mikomma.de/fh/eldy/multi/multi.html)

### [H-Orbitals](#)

... sich auch die Strahlungscharakteristik der Übergänge. [Maple Plot]. Verwandte Themen: Multipolstrahlung · Quantensprung. Aus Moderne Physik mit Maple ...

[www.mikomma.de/orbitals/orbitalb.htm](http://www.mikomma.de/orbitals/orbitalb.htm)

### [H-Orbitals statistisch](#)

Der Quantensprung. H-Orbitals aus 'Moderne Physik mit Maple'. HOME · Fächer · Physik · Elektrizität ...

[www.mikomma.de/fh/hydrod/hydrodens.html](http://www.mikomma.de/fh/hydrod/hydrodens.html)

### [Aristoteles](#)

... Sprung möglich sei (und heute meinen manche, die von Quantenphysik offensichtlich überhaupt keine Ahnung haben, es ginge auch mit einem Quantensprung). ...

[www.mikomma.de/didaktik/aridid/aridid.htm](http://www.mikomma.de/didaktik/aridid/aridid.htm)

### [Leistungskurs Abitur 2001, in 13 zusammen mit Grundkurs \(Aufsetzer ...](#)

Quantensprung. (Vgl. Lecherleitung – HD). Glossar: Quantenzahlen, Plancksches Wirkungsquantum, schwarzer Körper, ... (Erzählstunde) ...

[www.mikomma.de/ugangkomweb.htm](http://www.mikomma.de/ugangkomweb.htm)



Das Photon am Doppelspalt

## Teilchen oder Welle?

Die Frage ist alt. Sir Isaac Newton meinte vor dreihundert Jahren: Teilchen! Christiaan Huygens meinte: Welle! Und als Thomas Young vor zweihundert Jahren sein Doppelspaltexperiment vorführte, war man bei der Royal Society nicht begeistert, denn es waren deutliche Interferenzstreifen zu sehen.

Kann man sich heute besser vorstellen, "was ein Photon am Doppelspalt macht"?

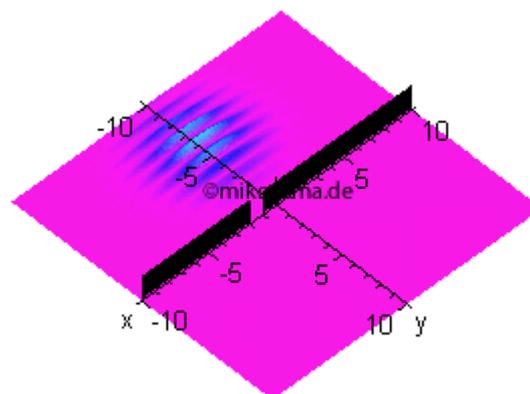
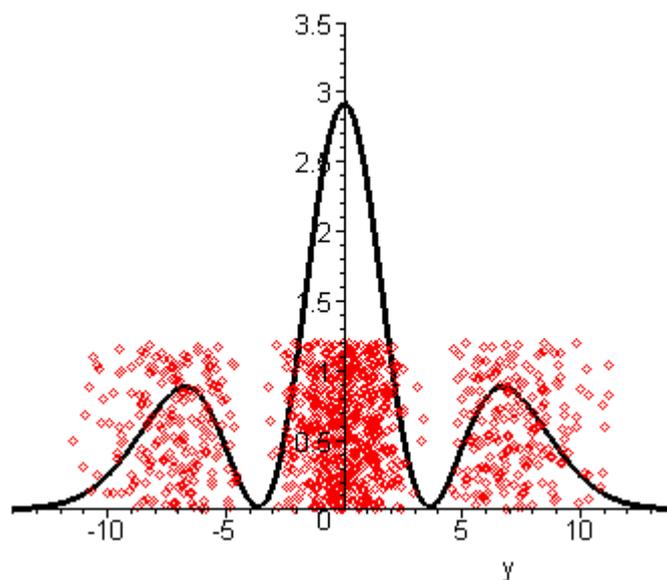
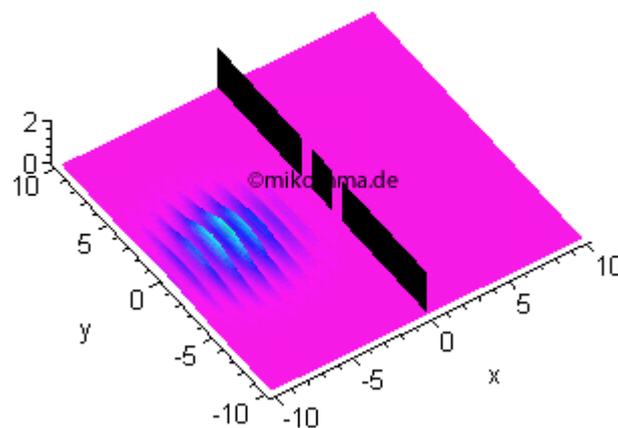
Man nimmt ein Wellenpaket (also die mathematische Darstellung eines halbwegs lokalisierten Photons) und lässt es gegen einen Doppelspalt laufen. Und siehe da: ein Teil wird absorbiert, ein Teil wird reflektiert, ein Teil passiert - und alles interferiert. Also hatte wohl Huygens recht!

Zu dumm nur, dass man zum Beispiel auf einem Film nie eine kontinuierliche Intensitätsverteilung sieht, sondern das Photon von einzelnen Atomen absorbiert wird - und zwar am Stück. Aber das kann ja an den Atomen liegen.

Auch wenn die Trefferquote sich an die Intensitätsverteilung hält: Das ist doch eine typische Teilcheneigenschaft! Und Teilchen können nicht durch beide Spalte gleichzeitig, sie sollten sich also auch am Doppelspalt lokalisieren lassen.

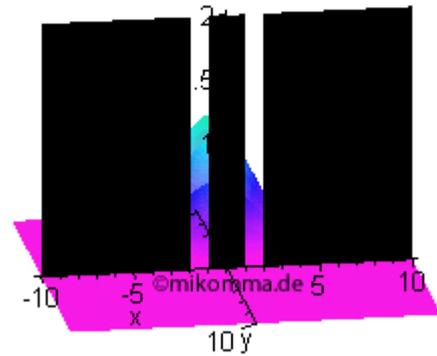
Und wie stellt man fest, durch welchen Spalt das Photon flog? Ganz einfach: man schließt einen Spalt?

Aber da bekommt man wieder Probleme: Jetzt kann man zwar genau sagen, durch welchen Spalt das Photon ging, dafür ist es anschließend um so weniger lokalisiert.

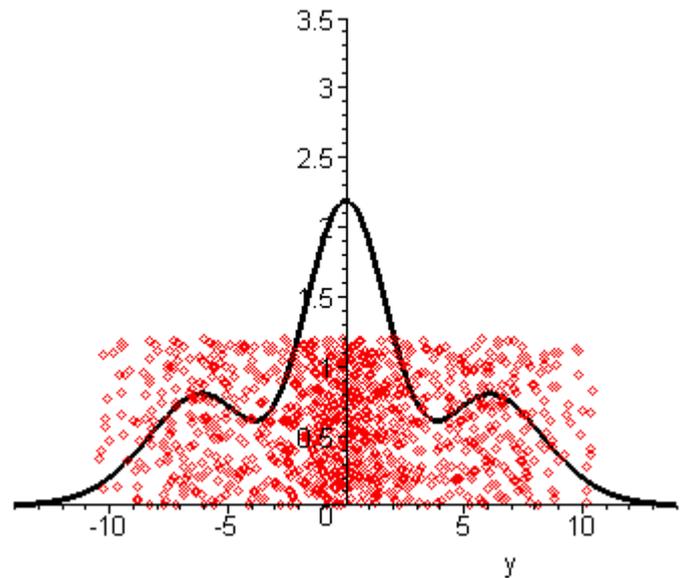


Wenn man es etwas intelligenter macht, indem man beide Spalte offen lässt und sich die Information über den Weg des Photons mit anderen Mitteln besorgt, benimmt sich das Photon tatsächlich wie ein Teilchen: Das Interferenzmuster verschwindet, weil die Kohärenz gestört wurde.

Sieht fast aus wie eine Flutwelle, die wegen der großen Turbulenzen beim Passieren der Öffnungen nicht mehr interferieren kann - jedenfalls gibt es keine lineare Superposition mehr.



Es gibt inzwischen sogar Experimente, in denen man die Kohärenz nur teilweise stört. Nicht unbeabsichtigt (etwa durch Messfehler), sondern ganz gezielt kann man zum Beispiel 50% Newton und 50% Huygens einstellen...

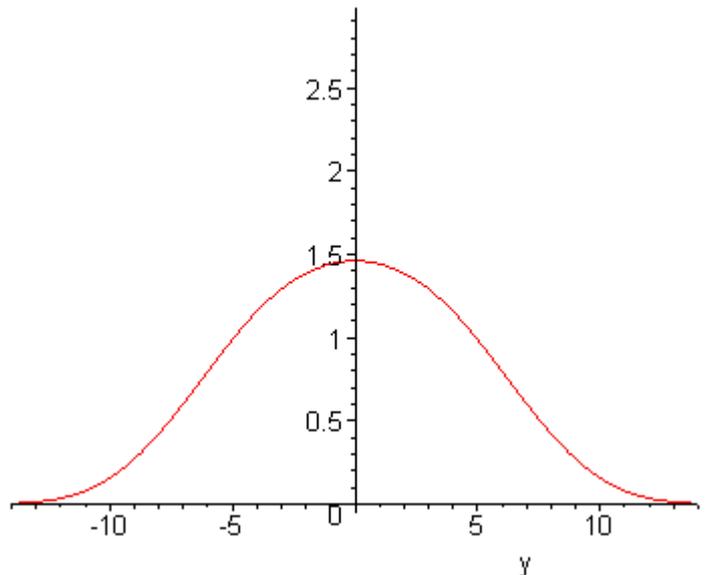


... oder die Apparatur vom Nachweis eines Teilchens zum Nachweis einer Welle durchregeln ;-))

Anmerkung: Die Bilder wurden nach den Regeln der Quanten- und Wellenmechanik mit Maple erzeugt. Nach oben ist jeweils das Betragsquadrat der "Psi-Funktion des Photons" am Doppelspalt abgetragen.

Siehe auch:

- [Fullerene am Doppelspalt](#)
- Von den [Quanten zur Klassik](#)



[Gitter](#) | [Fresnelbeugung](#) | [Zeiger](#) | [Photon am Doppelspalt](#)

[More Movies!](#)

aus 'Moderne Physik mit Maple'

[komma@oe.uni-tuebingen.de](mailto:komma@oe.uni-tuebingen.de)

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)



## What is a photon?

Diese Frage darf man wieder stellen! Natürlich weiß kein Mensch, was *etwas ist*, aber man wird doch noch danach fragen dürfen...

Im letzten Jahrhundert wurden solche Fragen tabuisiert durch die allmächtigen Quantenmechaniker, die mit ihrem abschreckenden mathematischen Apparat anscheinend unfehlbare Interpretationen belegten und damit einen Schleier über alles warfen, was der klassischen Beobachtung nicht zugänglich war.

Aber nun kommt wieder Bewegung in die Sache, weil man gelernt hat, mit einzelnen Atomen und Photonen zu *experimentieren*. In den neuen Forschungszweigen unseres Jahrtausends (wie z.B. Quantenoptik und Quantencomputer) werden all die im letzten Jahrhundert unbeantworteten Fragen neu gestellt und in vielen Artikeln behandelt. Hier ist ein besonders schöner Artikel dieser Art:

The calculated photon: Visualization of a quantum field

Martin Ligare and Ryan Oliveri

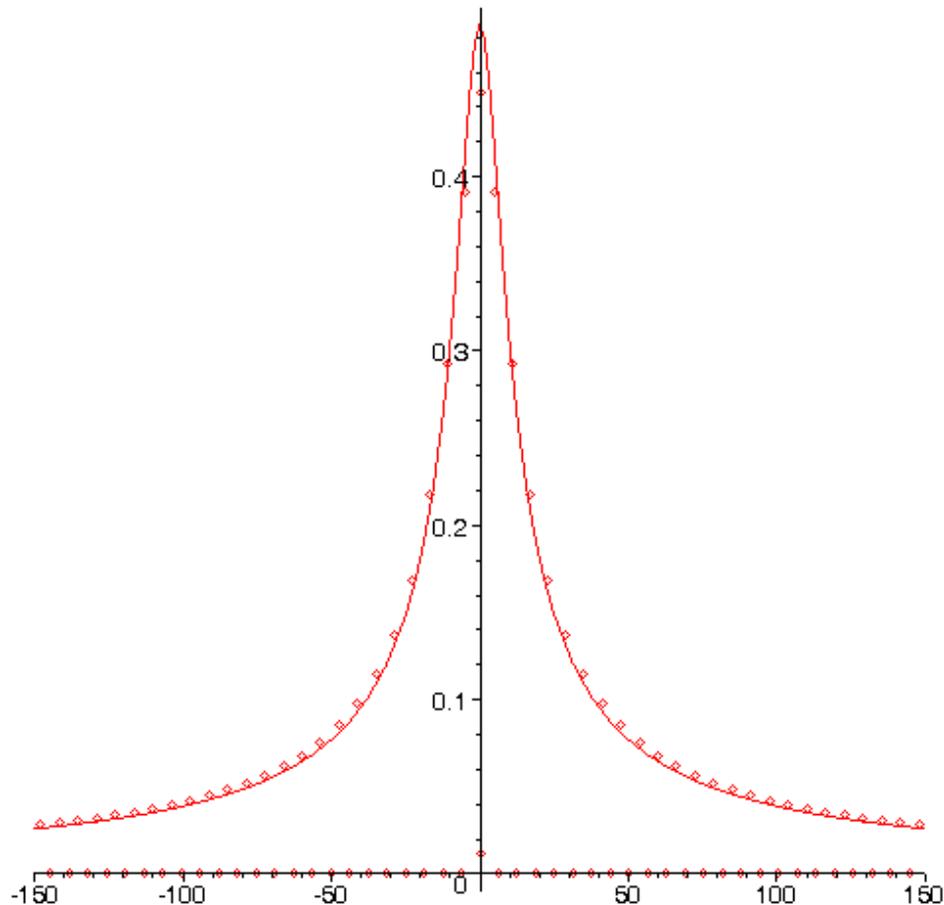
Am. J. Phys. 70 (1), January 2002

Also man weiß nicht, was ein Photon ist, kann es aber berechnen und visualisieren?

Wie macht man das?

Man setzt ein angeregtes Atom in die Mitte eines Hohlraums (für elektromagnetische Strahlung, oder für Photonen, oder einfach für Vakuum ;-)) und wartet, was passiert. Ein guter Experimentator wird sich vorher überlegen, was passieren könnte:

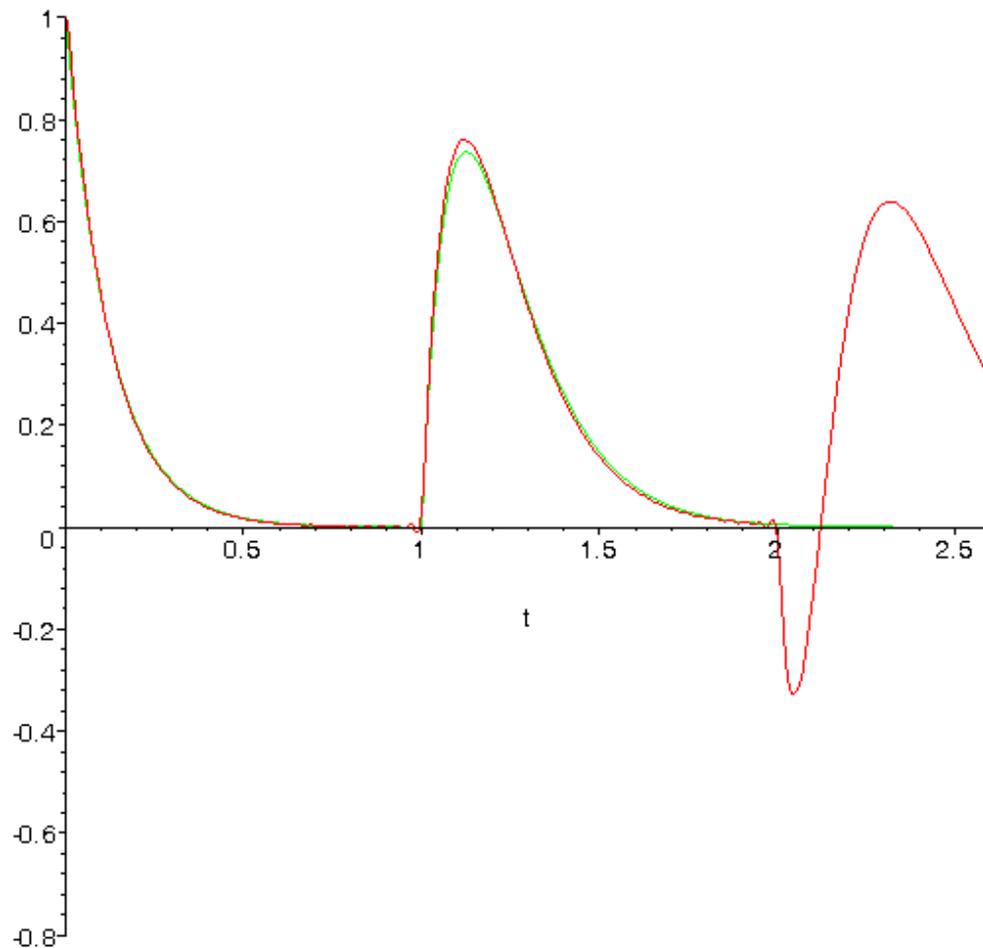
Für das System Atom + Hohlraum gibt es Energieeigenwerte mit Gewichten. Die Gewichte der Eigenwerte liegen auf einer [Lorentzlinie](#). Horizontale Achse: Differenzfrequenz zur Resonanzfrequenz des Atoms mit zwei Zuständen. (Jeder zweite Eigenwert hat das Gewicht 0, weil sich das Atom für diese Eigenwerte in einem Knoten des Vakuums befindet ;-))



Also sollte das Atom exponentiell "zerfallen".

```
>plot([evalc(Re(atom)),exp(-gam*t)+2*gam*Heaviside(t-1)*exp(-gam*(t-1))*(t-1)],t=0..2.6,-
```

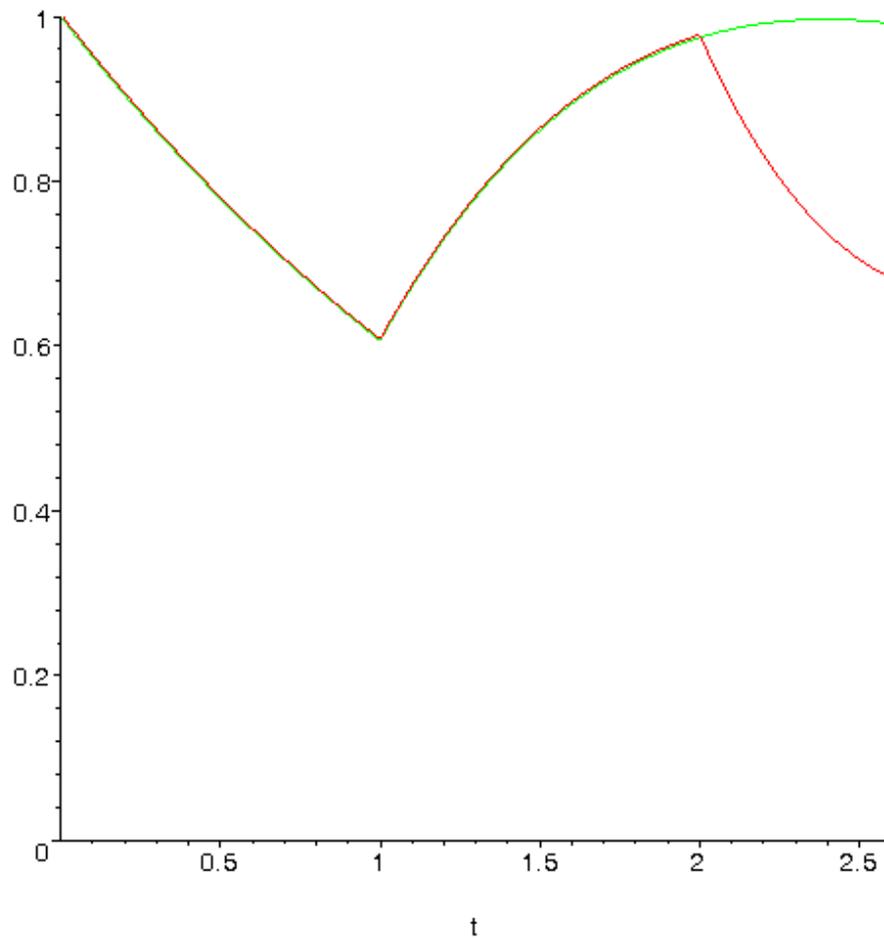
```
0.8..1,numpoints=500);
```



Tatsächlich! Wir bekommen ganz klassische Kurven (grün) - wie bei der Entladung und Aufladung eines Kondensators. Die roten Kurven sind quantenmechanisch berechnet und etwas wellig, weil nur eine  $100 \times 100$  Hamilton-Matrix verwendet wurde (mit einer  $300 \times 300$  Matrix ist kein Unterschied zur "klassischen Kurve" mehr zu sehen). Als Zeiteinheit ist die Dauer gewählt, die das Photon benötigt, um den Hohlraum zu durchqueren. Wenn es also zur Zeit 0 in der Mitte startet, kommt es zur Zeit 1 zum Atom zurück und lädt es wieder auf (allerdings nicht ganz...). Zur Zeit 2 scheint es das Atom unter 0 zu entladen - jedenfalls seinen Realteil - das liegt an der Phasenbeziehung zwischen Atom und Photon (die klassische Kurve könnte ergänzt werden).

Wenn das Atom schwächer an den Hohlraum gekoppelt ist, sehen die Kurven so aus.

```
>plot([evalc(Re(atom)),exp(-gam*t)+2*gam*Heaviside(t-1)*exp(-gam*(t-1))*(t-1)],t=0..2.6,0..1,numpoints=500);
```

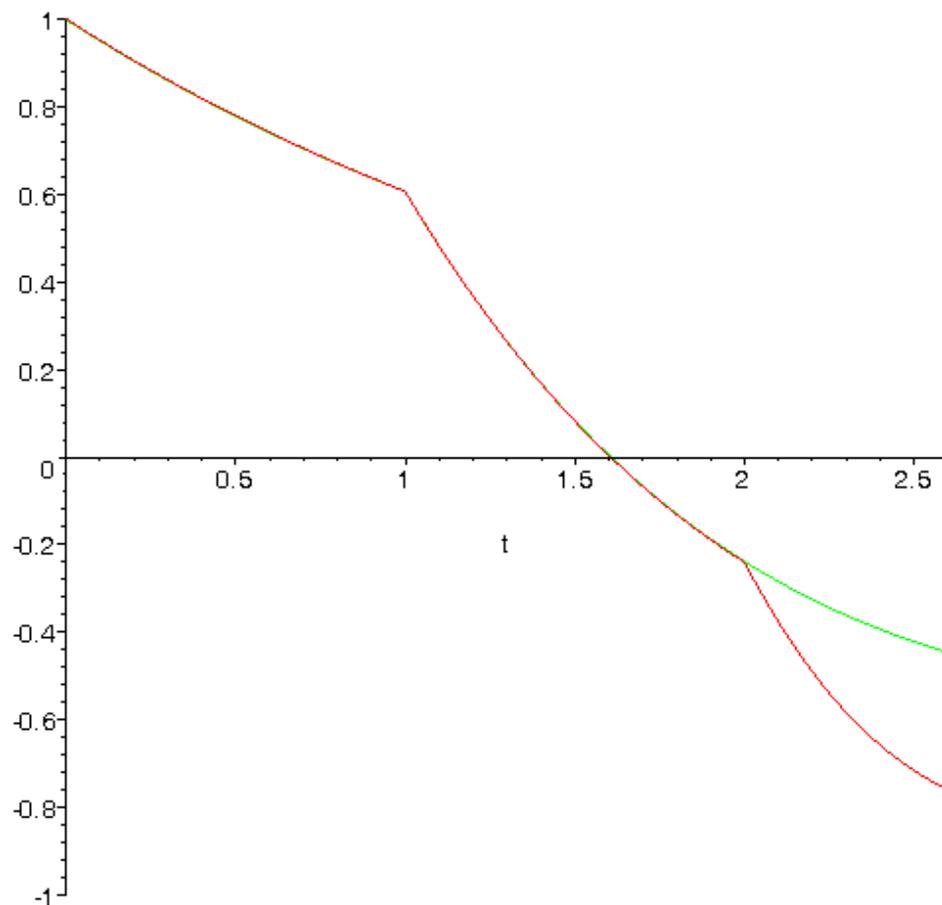


Das bedeutet einfach: Das Atom konnte seinen "Quantensprung" nicht zu Ende springen, weil das bei diesem "Quantensprung" abgestrahlte Photon vorher zurück kommt und das Atom wieder voll anregt.

Wenn sich das Atom allerdings an der "falschen Stelle" befindet, hat es Pech gehabt. Dann wird es vom Hohlraum schneller entladen als ursprünglich beabsichtigt (Nullstelle des Realteils der Amplitude) und mit umgekehrter Phase wieder angeregt:

```
>plot([evalc(Re(atom)),exp(-gam*t)-2*gam*Heaviside(t-1)*exp(-gam*(t-1))*(t-1)],t=0..2.6,-1..1,numpoints=500);
```

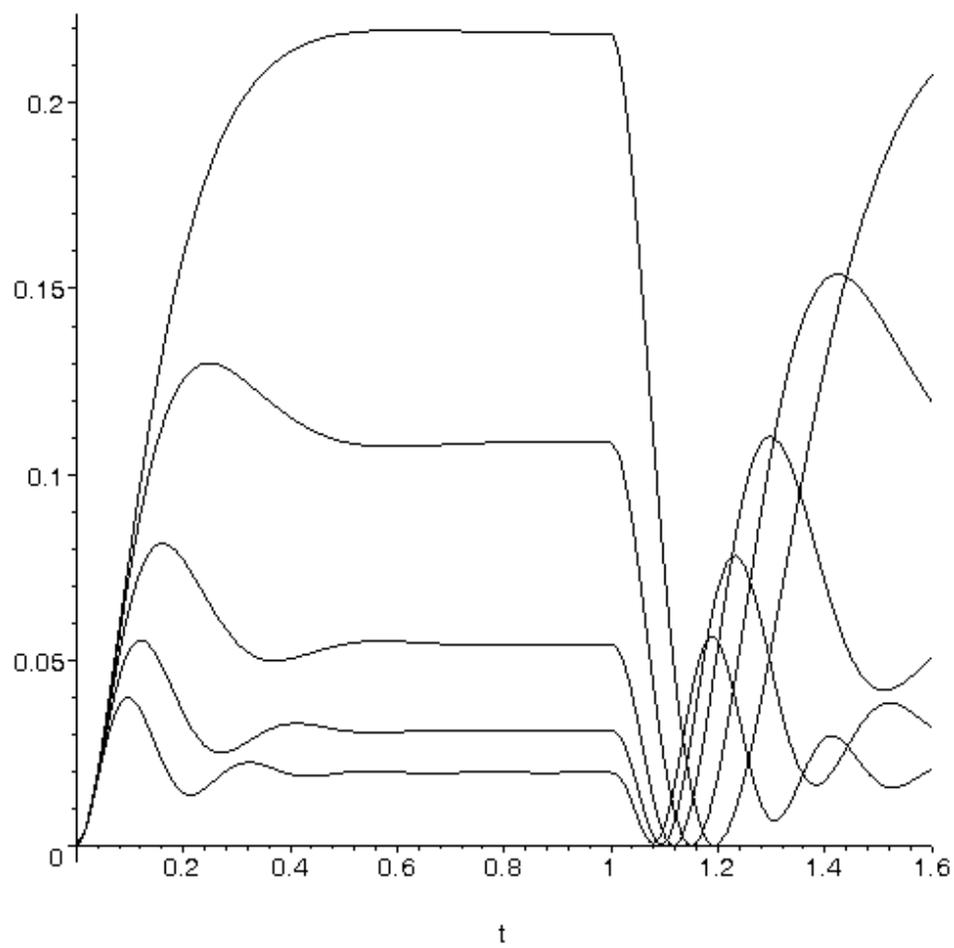
What is a photon?



Und wie geht es dem Photon in diesem Spiel? Es kommt in verschiedenen Moden daher. Je näher die Frequenz bei der Resonanzfrequenz liegt, desto größer die Amplitude. Moden, die weiter von der Resonanzfrequenz entfernt sind, zeigen ein klassisches Einschwingen ihrer Amplitude:

```
>plot([seq(evalc(abs(photon(t,i)))^2,i=1..10)],t=0..1.6,color=black);
```

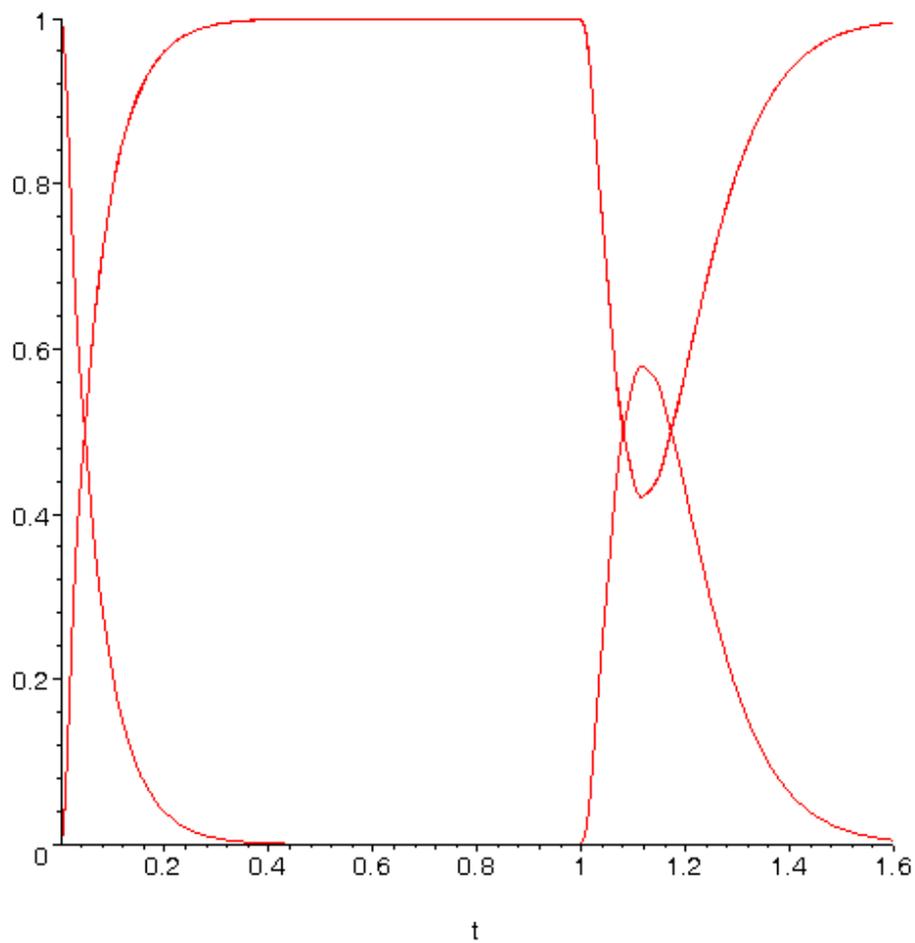
What is a photon?



Wenn man alle Moden aufsummiert (natürlich quantenmechanisch!), dann sollten sich die Wahrscheinlichkeiten von Atom und Photon für alle Zeiten zu 1 addieren, denn wir betrachten ja genau ein System!

```
>display(pa,pp,plot(1-evalc(abs(atom))^2,t=0..1.6,0..1,numpoints=500));
```

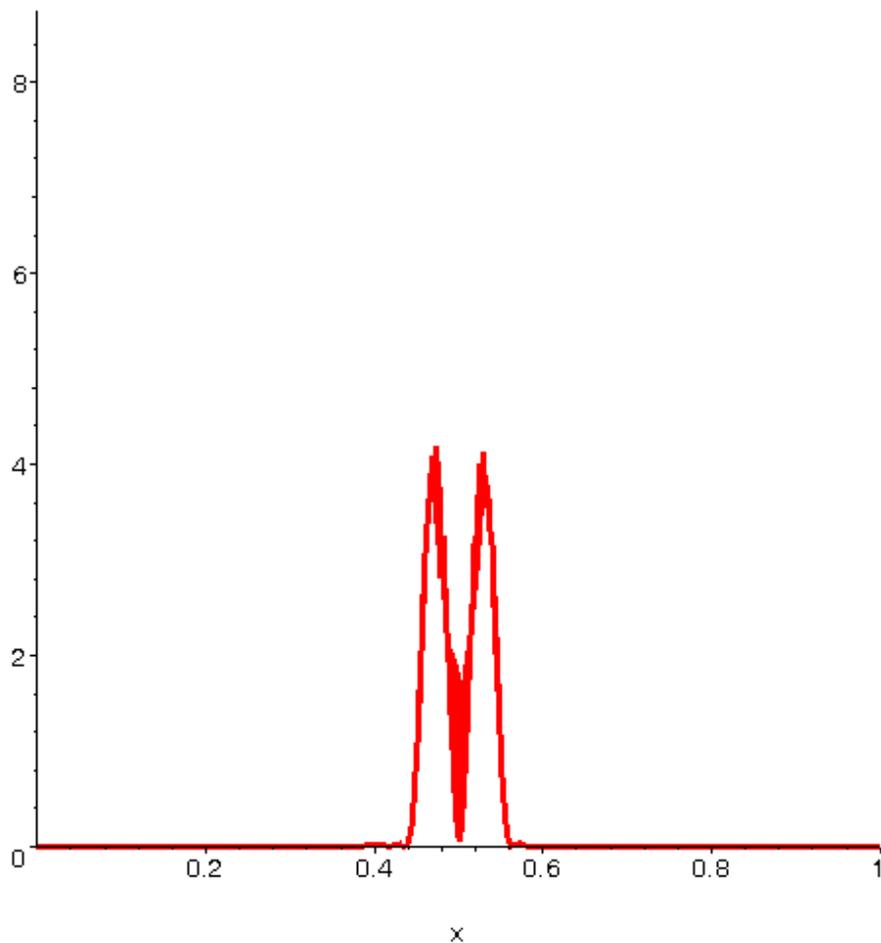
What is a photon?



Das scheint wohl zu stimmen! Bei genauer Betrachtung sieht man, dass die Kurve für die Photonenamplitude doppelt gezeichnet ist: die zweite Kurve ist "1 - Atomamplitude".

Dann wäre es doch noch interessant, zu untersuchen, wie sich das Photon bewegt. Achtung: Wir brechen hier verschiedene Tabus!

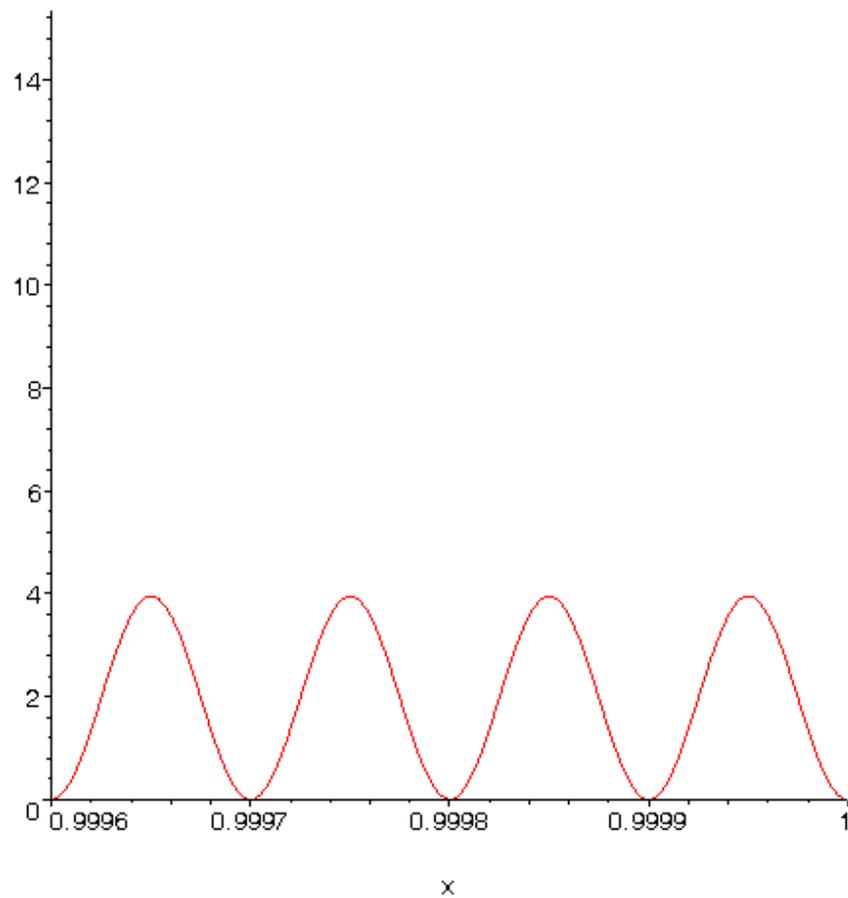
```
>display(seq(plot(E2(x,t),x=0..1,numpoints=50),t=seq(i/20,i=1..40)), insequence=true);
```



The calculated photon: Was lässt sich an einem Photon berechnen und damit visualisieren? Z.B. der Erwartungswert des Quadrates der elektrischen Feldstärke. Und wenn das Atom exponentiell zerfällt, dann muss sich das wohl auch im Photon widerspiegeln? Richtig! Das Photon wird emittiert (quanten*theoretisch* mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach beiden Seiten) und wenn das Atom zu einem bestimmten Zeitpunkt mit seiner Emission beginnt (das ist ein Artefakt und nicht der Quantensprung!), hat die Feldstärke eine steile Flanke auf der Vorderseite. Bei realen Emissionsvorgängen wird der Übergang allmählich einsetzen (in atomarem Zeitmaßstab) und das Photon wird nur auf einer Seite zu finden sein (Impulserhaltung). Die Animation zeigt noch weitere Artefakte, nämlich Knickstellen auf dem exponentiell abfallenden Teil. Sie verschwinden, wenn man mit höherer Auflösung (300x300-Matrix) rechnet.

Kein Artefakt ist allerdings die Interferenz des Photons mit sich selbst, wenn es reflektiert wird. Eine Lupe an der rechten Grenze des Hohlraums zeigt die zeitlich veränderliche stehende Welle:

```
>display(seq(plot(E2(x,t),x=0.9996..1,title=convert(t,string)),t=seq(evalf(0.5+i/250),i=0..40)),insequence=true);
```



Was ist also ein Photon?

Links:

- [The calculated photon: Visualization of a quantum field](#)
- [OPN Trends—The Nature of Light: What Is a Photon?](#)

'Moderne Physik mit Maple'

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Das Märchen von der Photonenstatistik

in Anlehnung an

**Photon-antibunching and sub-Poissonian photon statistics**

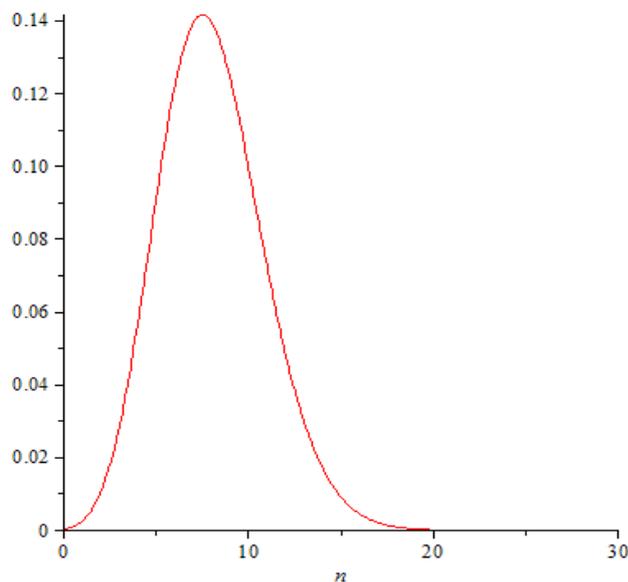
X. T. Zou and L. Mandel

*Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York 14627*

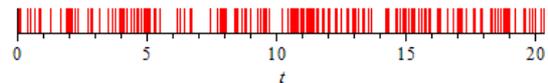
(Received 19 April 1989)

Man liest oft, dass Photonen Klumpen bilden können (bunching) oder Abstand halten können (antibunching) und dass es auch Photonen gibt, die sich "so gut wie klassisch verhalten" (kohärentes Licht). Dazu wird eine "Photonenverteilung" gezeigt, die die Wahrscheinlichkeit für  $n$  Photonen (zu welcher Zeit an welchem Ort?) angibt und daneben ein "Strichcode", der die zeitliche Abfolge der Photonen oder die "Photonenstatistik" (an welchem Ort?) symbolisieren soll, etwa so:

Photonenverteilung



Photonenstatistik



Und der mitdenkende Leser muss sich fragen, woher der kühne Schluss von einer Verteilung über  $n$  auf eine Verteilung über  $t$  kommt.

Das "Maß aller Dinge" für die Photonenstatistik ist dabei die Poissonverteilung: Photonen, die einer Poissonverteilung "gehörchen", bilden weder Klumpen noch halten sie Abstand. Wenn die Verteilung breiter ist (Super-Poisson) gibt es Klumpen und wenn sie schmaler ist (Sub-Poisson), halten die Photonen Abstand. So liest man.

Dieser Artikel soll etwas Licht auf die Problematik solcher verkürzten Darstellungen werfen.

Zunächst muss man eine Verbindung zwischen der "zeitlosen Photonverteilung" (alleine als Funktion der Photonenzahl  $n$ ) und ihrer zeitlichen Entwicklung herstellen. Hat man einen "stationären Photonstrom" mit der mittleren Photonenrate  $\langle w \rangle$ , so gilt für die mittlere Zahl  $\langle n \rangle$  der Photonen, die in der Zeit (genauer im Zeitintervall)  $t$  registriert werden können (siehe [Literatur](#), Glauber):

$$\langle n \rangle = \langle w \rangle t \quad (1)$$

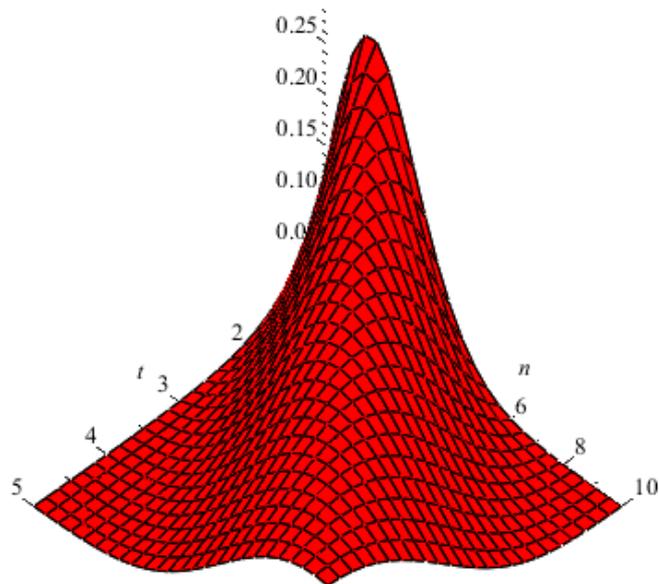
Damit sieht eine mehrdimensionale Poissonverteilung  $p(n, t)$  so aus ( $\langle w \rangle$  wird in den folgenden Formeln als  $w$  notiert),

Laserlicht oder kohärentes Licht:

> pois:=(w\*t)^n/n!\*exp(-w\*t);

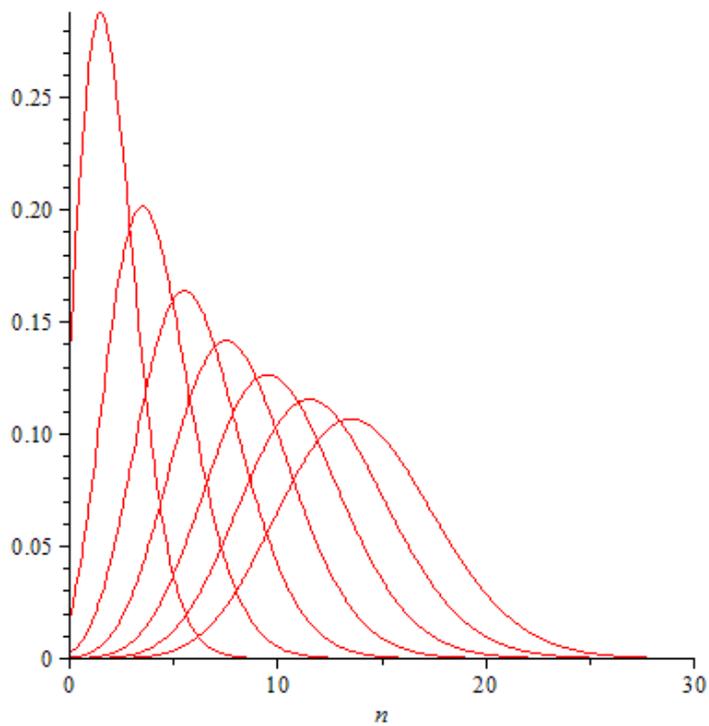
$$pois := \frac{(w t)^n e^{-w t}}{n!} \quad (2)$$

```
> plot3d(pois,t=1..5,n=0..10,axes=normal,color=red);
```



Das heißt, der Mittelwert der Verteilung verschiebt sich mit  $t$  und die Verteilung wird breiter. Die 2D-Darstellung der Kurvenschar mit  $t$  als Parameter ist etwas übersichtlicher:

```
> plot([seq(op([pois]),t=[1,2,3,4,5,6,7])],n=0..30,color=red);
```



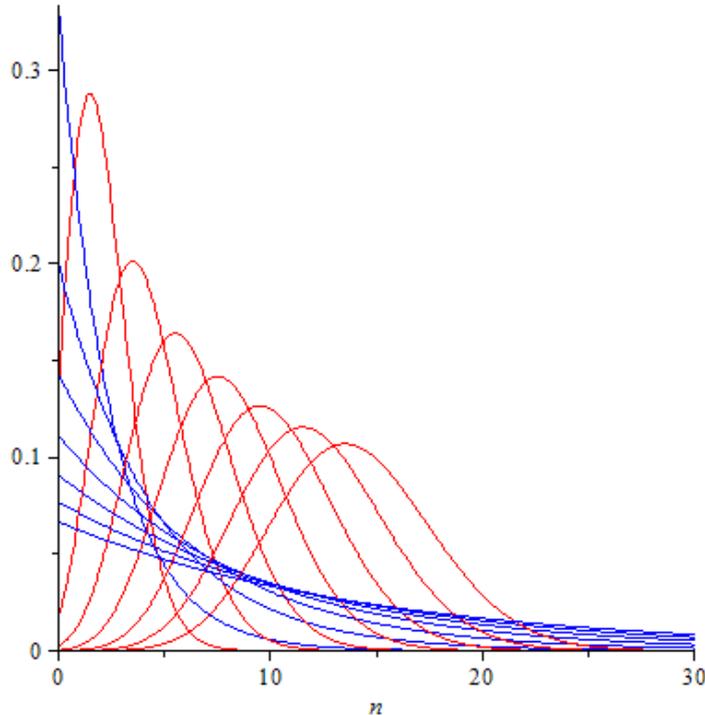
Nimmt man eine geometrische Verteilung (thermisches Licht), so erhält man:

```
> ch:=1/(1+w*t)*(w*t/(1+w*t))^n;
```

$$ch := \frac{\left(\frac{wt}{1+wt}\right)^n}{1+wt} \quad (3)$$

Vergleich der Verteilungen (Laser rot, thermisch blau):

```
> plot([seq(op([pois,ch]),t=[1,2,3,4,5,6,7]),n=0..30,color=[red,blue]);
```



Nun sagt man: die geometrische Verteilung (Bose-Einstein-Statistik) ist wesentlich breiter als die Poissonverteilung (Super-Poisson), was die Ursache für Bunching sei, oder auch: "Bosonen mögen sich" und bilden deshalb Klumpen.

Das ist aber ein Trugschluss (in mehrfacher Hinsicht)! Die zeitliche Abfolge der Registrierung von Photonen wird alleine durch  $p(n=0,t)$  bestimmt, genauer gesagt ist sie zur zweiten Ableitung dieser Funktion nach der Zeit proportional. Die Verteilung über  $n$  spielt darin jedenfalls keine Rolle. Geht man von einem Idealexperiment aus, in dem auch die Statistik der Registrierung (Ansprchwahrscheinlichkeit der Detektoren, usw.) keine Rolle spielt, so hat man die Dichte für die bedingte Wahrscheinlichkeit  $w(t)$  zu berechnen, dass das erste Photon zur Zeit 0 (allgemeiner  $t_0$ ) und das zweite zur Zeit  $t$  (allgemeiner  $t_0+t$ ) registriert wird.

Für kohärentes Licht erhält man:

```
> wco:=w*exp(-w*t);
```

$$wco := w e^{-wt} \quad (4)$$

Das ist in diesem Fall gleich  $p(n=0,t)$ : Laserlicht ist nicht nur kohärent, sondern seine Photonen sind auch "statistisch unabhängig" (exponentielles Abklingen wie beim radioaktiven Zerfall)!

Für thermisches Licht erhält man:

```
> wch:=2*w/(1+w*t)^3;
```

$$wch := \frac{2w}{(1+wt)^3} \quad (5)$$

Entstehen die Photonen durch Resonanzfluoreszenz (z.B.), so kann man ohne die Kenntnis einer Photonverteilung über  $n$  die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte so angeben:

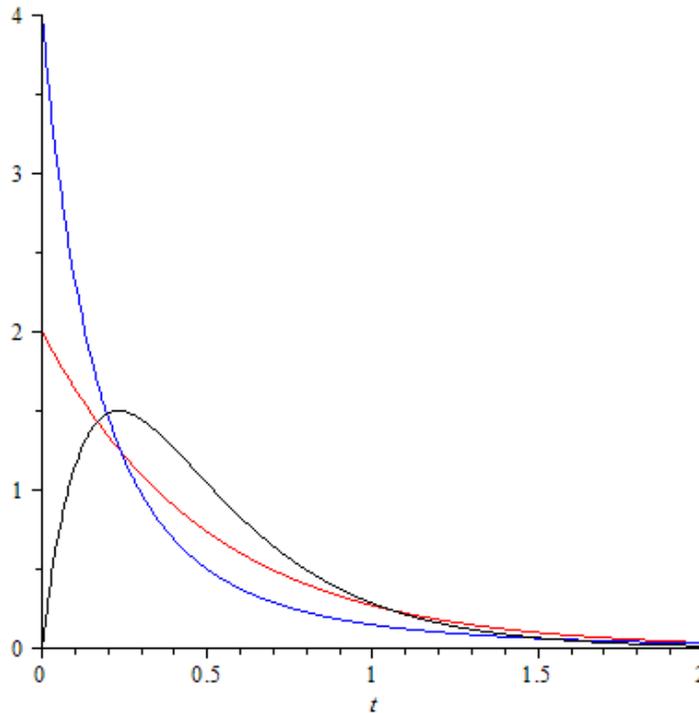
```
> wantib:=diff((1-exp(-3/2*w*t))^2,t);
```

$$wantib := 3 \left( 1 - e^{-\frac{3}{2} w t} \right) w e^{-\frac{3}{2} w t} \quad (6)$$

Diese Funktion  $w(t)$  gibt in stark vereinfachter Form die Photonenrate im Experiment von M. Dagenais und L. Mandel (1978, siehe [Literatur](#)) wieder und entspricht der Statistik einer radioaktiven Zerfallsreihe (Aktivität des Tochterkerns).

Im Vergleich sehen diese zeitlichen Verteilungen  $w(t)$  so aus ( $\langle w \rangle = 2$ (passende Einheiten)):

```
> plot([wco,wch,wantib],t=0..2,color=[red,blue,black]);
```



Nun "sieht man":

- Laserlicht (rot):  $w(0)$  ist gleich  $\langle w \rangle$  und  $w(t)$  klingt exponentiell ab.
- thermisches Licht (blau):  $w(0)$  ist gleich  $2 \cdot \langle w \rangle$  und  $w(t)$  unterschreitet für größere  $t$  die "Laserverteilung". D.h., die Registrierung von Photonenpaaren ist in kleinen Zeitabständen wahrscheinlicher als in großen: Bunching!
- Fluoreszenzlicht (schwarz):  $w(0)$  ist gleich 0 (!) und  $w(t)$  hat ein Maximum (das über den anderen Verteilungen liegt), D.h., die Registrierung von Photonenpaaren ist in kleinen Zeitabständen sehr unwahrscheinlich und in bestimmten Zeitabständen am wahrscheinlichsten: Antibunching!

Und wie kann man das veranschaulichen?

In nebenstehender Abbildung ist die Zeit der Registrierung eines Photons über der Anzahl der Registrierungen für  $\langle w \rangle = 10$ (passende Einheiten) abgetragen:

Wenn man demnächst "Photonen on demand" erzeugen kann, und dies mit einer konstanten Rate macht, so liegen die Zeiten der Erzeugung und Registrierung auf einer Geraden (grün). (Das wäre also der wirklich klassische Fall, hier nur zur Orientierung eingezeichnet ;-)).

Die Registrierungszeiten von "Laserphotonen" (rot) schwanken "statistisch unabhängig" um eine konstante Zählrate. (Das sieht man doch - oder?)

Die Registrierungszeiten von "thermischen Photonen" (blau) schwanken nicht "statistisch unabhängig" um eine konstante Zählrate. Manchmal dauert es ziemlich lange bis das nächste Photon registriert wird (fast senkrechte Linien). Aber die thermisch Quelle füllt diese Lücken durch Bunching wieder auf.

Die Registrierungszeiten von "Fluoreszenzphotonen" (schwarz) liegen der konstanten Zählrate am nächsten.

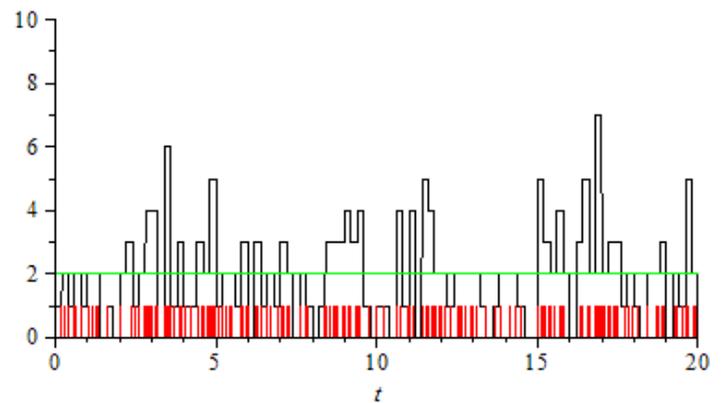
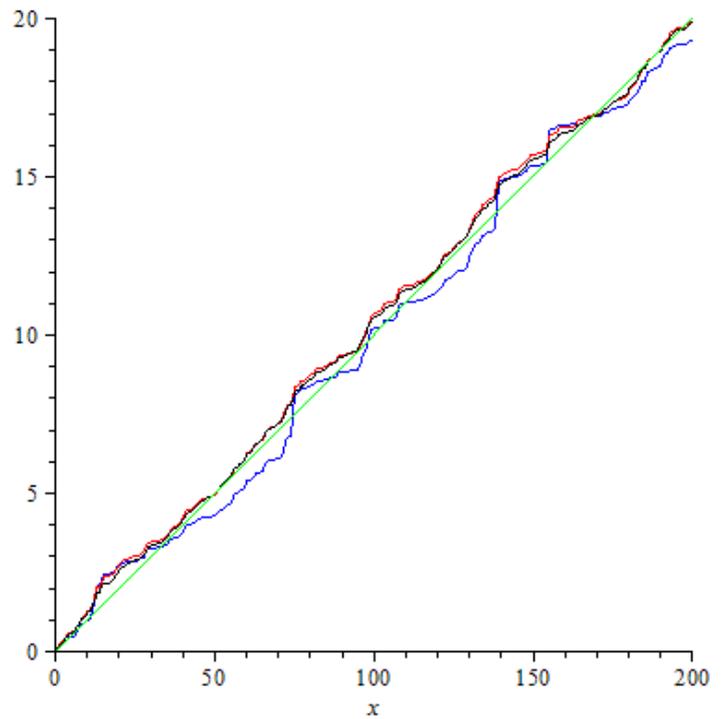
Welches Licht ist nun "klassisch" und welches "nicht klassisch"?

Vielleicht helfen ein paar Statistiken?

Stellt man die Registrierungszeiten von **Laserphotonen** als "Strichcode" dar (rot), so sieht man eigentlich nicht viel. Wenn die Striche dicht liegen (zusammenhängende rote Rechtecke), muss das keine besonders hohe Zählrate bedeuten. Vielmehr kann sich in dieser Darstellung unter einem einzigen Strich die Registrierung mehrerer Photonen verbergen, die in besonders kurzen Zeitabständen erzeugt wurden.

Ein Histogramm (schwarze Linien) ist etwas aussagekräftiger. Wenn man die Anzahl der Registrierungen in einem (geeignet kleinen) Zeitintervall aufsummiert, zeigen die Spitzen des Histogramms eine höhere Dichte besser an als der "Strichcode". Alles nur eine Frage der Auflösung ;-).

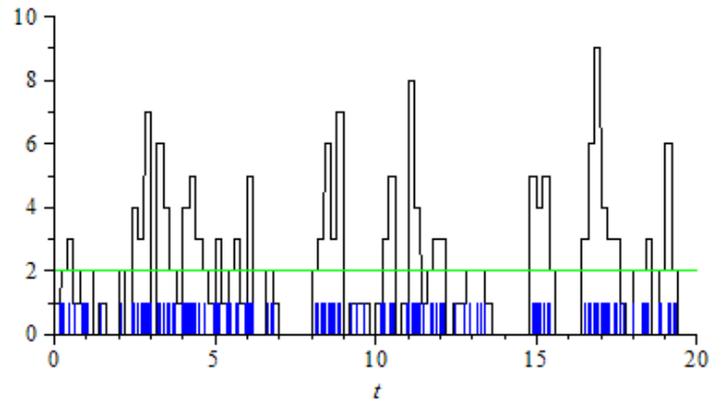
Zur Orientierung ist wieder der "klassische Mittelwert" (grün) eingetragen.



Wie sieht in dieser Darstellung die Statistik für **thermisches Licht** aus?

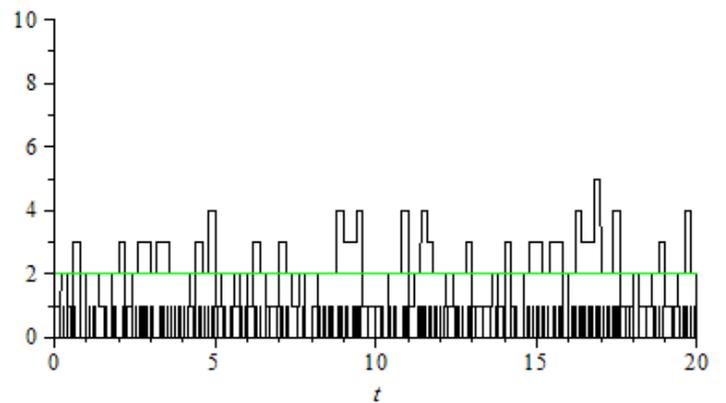
Also da sind schon Bündel (oder Klumpen?) zu sehen!

Wobei natürlich die Lücken mindestens ebenso wichtig sind!



Und Fluoreszenzphotonen scheinen tatsächlich etwas mehr Abstand zu halten als Laserphotonen, wenngleich sie vom idealen Antibunching (äquidistante Striche, Histogramm = Mittelwert) noch etwas entfernt sind.

Anmerkung: "Fehlende" horizontale Linien des Histogramms werden durch die grüne Linie des Mittelwerts überdeckt (gilt auch für obige Histogramme).



Man sollte aber über all der Statistik die Physik nicht vergessen: "Photonen an sich" haben - physikalisch gesehen - keine Statistik (oder Verteilung?), die sich direkt bestimmen lässt. Es kommt vielmehr darauf an wie sie entstehen und nachgewiesen werden. Man kann zwar Photonensstatistiken (oder die Statistik des quantisierten elektromagnetischen Feldes) nachträglich manipulieren, aber in erster Linie handelt es sich bei einer "Photonensstatistik" um die *Statistik der Quellen und Absorber von Photonen*. Die Photonen sind und bleiben "nur" Botenteilchen.

Insofern sind auch solche sprachlichen Gebilde etwas irreführend (Zou und Mandel 1990, [Literatur](#)):

Let us first make clear what we mean. Photon bunching is the tendency of photons (or other particles) to distribute themselves preferentially in bunches rather than at random, so that when a light beam falls on a photodetector more photon pairs are detected close together in time than further apart. Antibunching is the opposite effect, in which fewer photon pairs are detected close together than further apart. As was shown by Glauber,<sup>3</sup> when light falls on a photodetector, the joint probability density  $P_2(t, t + \tau)$  for detecting one photon at time  $t$  and another one at later time  $t + \tau$  is given by

$$P_2(t, t + \tau) = K \langle \Upsilon : \hat{I}(t) \hat{I}(t + \tau) : \rangle , \quad (1)$$

Photonen (und andere Teilchen) haben keine *Neigungen*, sich wie ein Kollektiv oder wie Individuen zu verhalten. Natürlich wissen Zou und Mandel, was sie sagen. Und die meisten Physiker verstehen auch diese anthropozentrische Sprechweise und denken automatisch die Anführungszeichen an der richtigen Stelle mit: "the tendency of photons to distribute *themselves*" preferently". Aber wer diese Aussage wörtlich nimmt, überliest dann auch gerne, dass das Photon "auf einen Detektor treffen" muss, wenn es zur "Photonenstatistik" beitragen soll, und vergisst komplett wie es erzeugt wurde.

Bei der folgenden eindeutigen Aussage (Zou und Mandel 1989) muss man allerdings keine Anführungszeichen mitdenken:

**These considerations, although contrived, show that sub-Poisson counting statistics need not be associated with antibunching but can be accompanied by bunching. Therefore, sub-Poisson statistics and antibunching are distinct effects, and it is important that the definitions of these phenomena not be confused.**

Methode: Monte Carlo

Literatur:

R. J. Glauber, Quantum Theory of Optical Coherence  
 M. Dagenais and L. Mandel, Phys. Rev. A, vol.18, 2218 (1978)  
 X.T. Zou and L. Mandel, Phys. Rev. A 41, 475–476 (1990)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Quantenmechanische Zustände im Phasenraum

(Kleines 1 x 1)

In der klassischen Physik lässt sich der Zustand eines Systems immer eindeutig angeben (prinzipiell jedenfalls), also graphisch oder geometrisch immer durch einen Punkt darstellen - egal in welchem Raum.

In der Quantenmechanik muss diese "exakte Beschreibung" durch "unscharfe Zustände" ersetzt werden, weil das Produkt der Unschärfen kanonisch konjugierter Variablen (z.B. Ort und Impuls) nicht Null werden kann. Aus Kurven im Phasenraum werden also Verteilungen im Phasenraum.

Warum überhaupt Phasenraum? Schon seit Hamilton weiß man, dass sich die "eigentliche Physik" nicht im Orts- oder Impulsraum alleine abspielt, sondern dass hinter der für uns sichtbaren Bühne Zustände (= Phasen) das Geschehen bestimmen und sich somit das System viel kompakter mit einem "Phasenportrait" beschreiben lässt: Anstatt eine Sinuskurve (als Funktion der Zeit) für den Ort und eine Cosinuskurve für den Impuls zu zeichnen, eliminiert man die Zeit und stellt den Impuls als Funktion des Orts dar und erhält einen Kreis als Darstellung für eine harmonische Schwingung - eine runde Sache also!

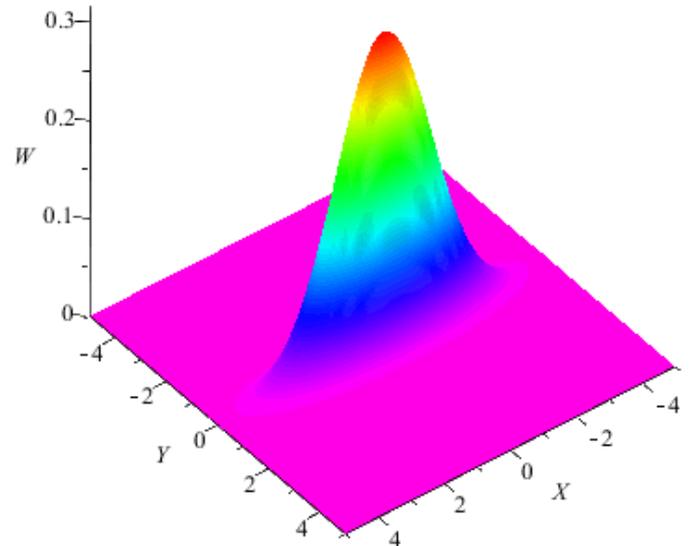
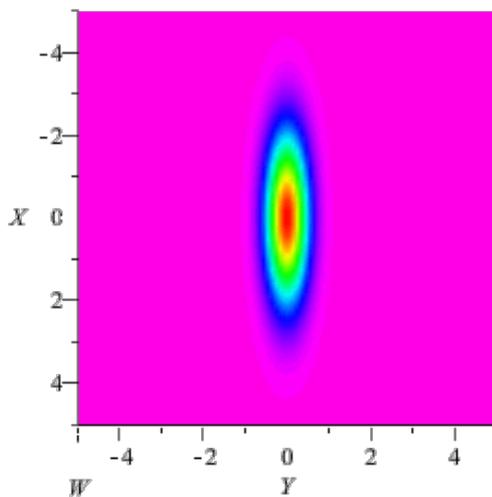
Was wird aus diesem Kreis in der Quantenmechanik?

Wir sollten uns zunächst fragen, was aus einem Punkt im klassischen Phasenraum wird, wenn man den Zustand quantenmechanisch beschreibt:

Kleines 1 x 1 des quantenmechanischen Phasenraums

Im den folgenden Darstellungen stehen die Variablen  $X$  und  $Y$  für kanonisch konjugierte Variablen oder "Quadraturkomponenten" (grob gesprochen). Die Variable  $W$  (Hochachse in 3D-Darstellung) steht für Wahrscheinlichkeit (oder Wigner). Die bequemste Methode, von der klassischen Beschreibung (Punkt im Phasenraum) zur quantenmechanischen Beschreibung überzugehen, besteht darin, "den Punkt durch eine Gaußverteilung zu ersetzen", wobei muss die Gaußverteilung nicht rotationssymmetrisch sein muss:

Gequetschte Zustände (squeezed states):



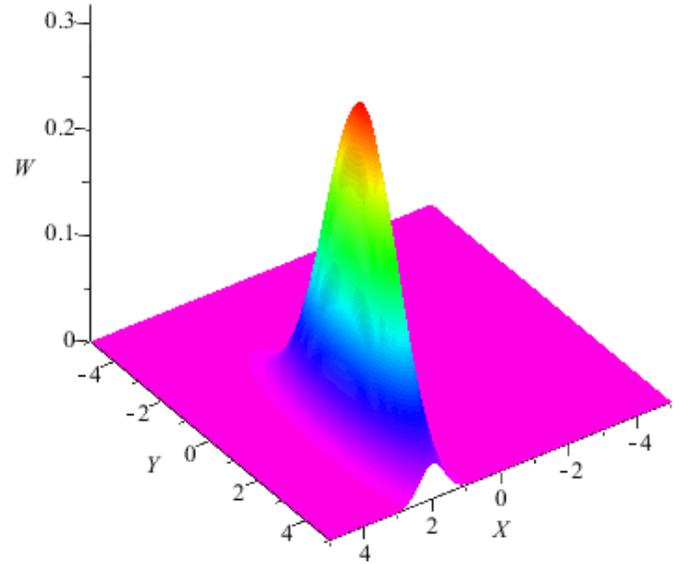
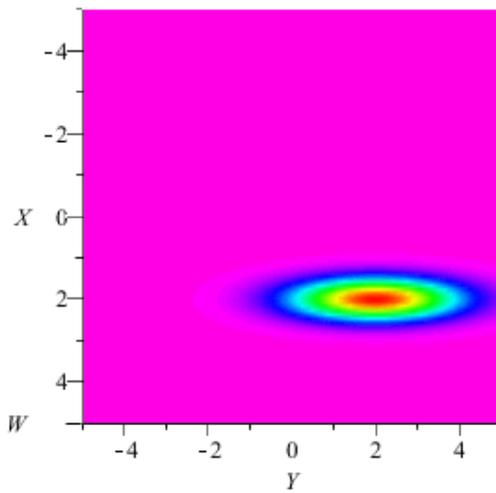
In der  $X$ - $Y$ -Ebene erhält man nicht einen Punkt sondern eine "Zigarre": Der Zustand des Systems kann nicht beliebig genau angegeben werden. Die Animation zeigt Zigarren (Ellipsen) mit verschiedenen Halbachsen (parallel zu den Koordinatenachsen).

In der dreidimensionalen Darstellung kann - anschaulich gesprochen -  $W$  (Hochachse) als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, das System im Zustand  $X$ - $Y$  anzutreffen.

In obigen Darstellungen liegt das Zentrum der Verteilungen bei  $(0 | 0)$ . Klassisch gesehen ruht also "ein Punkt" im Ursprung. Quantenmechanisch gesehen ist das aber nicht möglich. Man kann die Genauigkeit einer Observablen (z.B.  $X$ ) nur auf Kosten der anderen (z.B.  $Y$ ) steigern. Wenn man den Zustand in eine Richtung quetscht, streckt er sich in die andere. Diese Regel (Heisenbergs Unschärferelation) ist so fundamental, dass sie sogar für das Vakuum  $(0 | 0)$  gilt!

Das Zentrum der Verteilung muss aber nicht im Ursprung liegen und die Halbachsen können gegen die Koordinatenachsen (des Phasenraums) gedreht sein.

Gedrehte Zustände (rotated states):



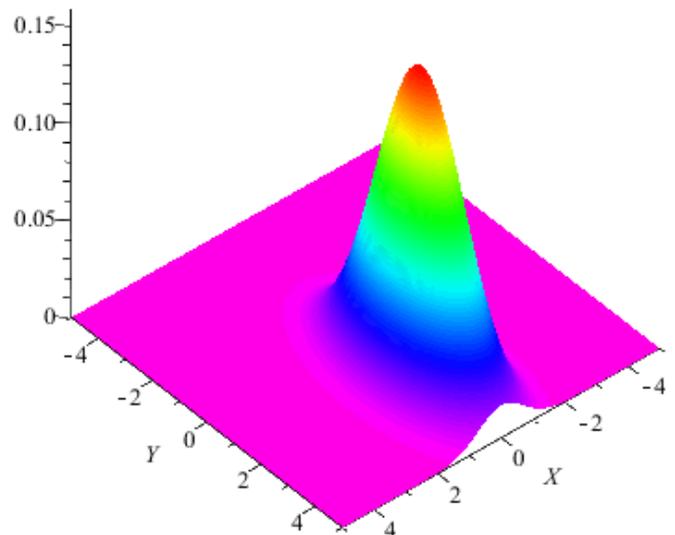
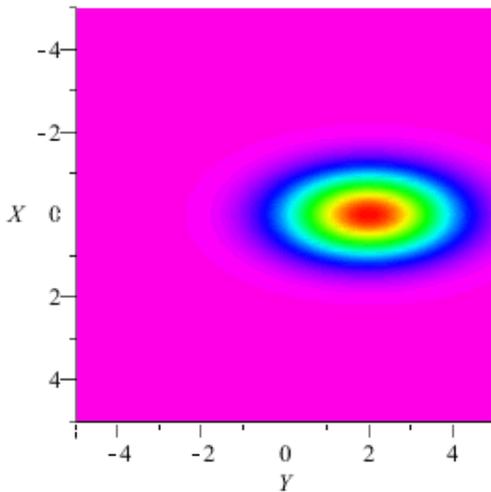
Gedrehte Zustände (rotated states) 2D

... und 3D

Obige Animationen zeigen nicht (unbedingt) die zeitliche Entwicklung eines Zustands, sondern zunächst nur die Variation der Parameter Quetschung und Drehung.

Wie entwickelt sich ein Zustand (mit konstanter Quetschung und Drehung) im Laufe der Zeit?

Wir nehmen das Standardbeispiel des harmonischen Oszillators (Kreis im klassischen Phasenraum):



Die Zigarre rotiert mit ihrem Mittelpunkt um den Ursprung.

Auch in 3D :-)

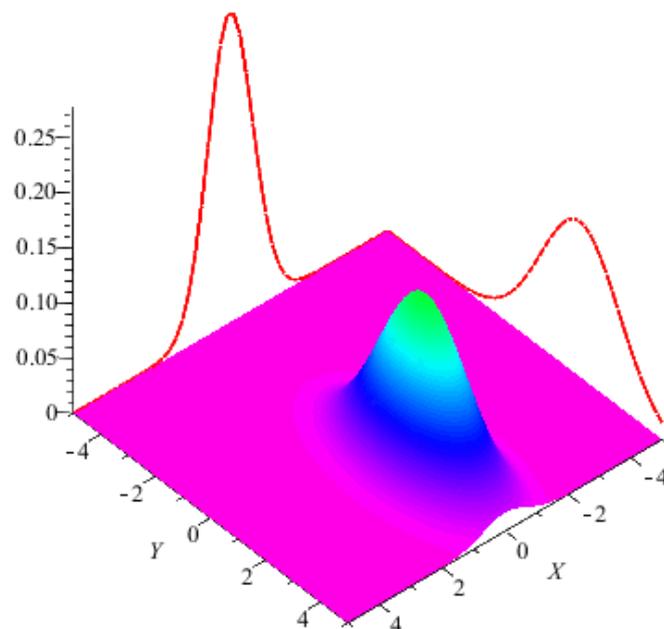
Wie sind diese Darstellungen zu lesen? Anscheinend gibt es im Vergleich zum klassischen Phasenraum viele Kreise und selbst wenn sich das System "auf einem Kreis befinden würde", wüsste man nicht genau wo.

Vielleicht hilft eine Rückübersetzung in den klassischen Koordinatenraum?

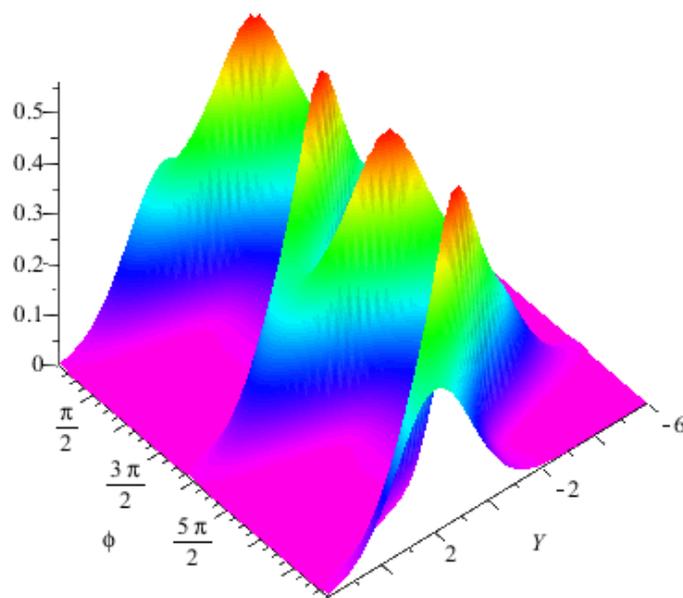
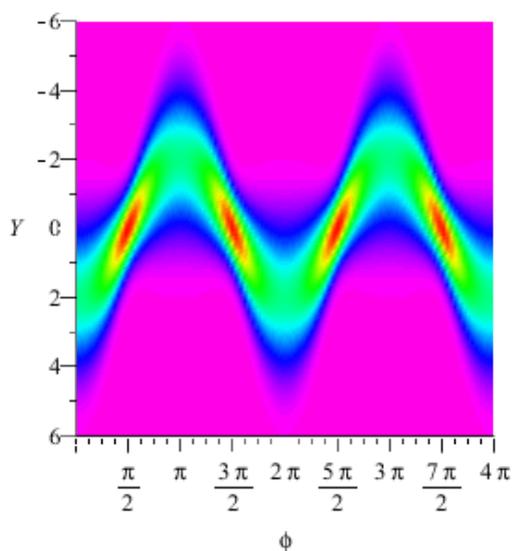
Das geht mit Randverteilungen:

Wenn man sich nur für eine der kanonisch konjugierten Variablen interessiert (oder nur eine messen kann, s.o. "Heisenberg" :-), muss man über die Verteilung der anderen summieren/integrieren. Damit erhält man eine "Randverteilung" (rote Kurven). Im Falle des harmonischen Oszillators sind das Gaußkurven, die mit variabler Breite und Höhe harmonisch um ihre Ruhelage schwingen.

Den "Grenzfall der klassischen Physik" erhält man mit einer "Gaußverteilung der Breite 0" (Delta-Funktion).



Die Randverteilungen kann man über der Zeit (oder dem Winkel  $\Phi$ ) abtragen. Mit einer "klassischen Kreisfunktion" würde sich eine "Sinus-Kurve" ergeben. Nun hat man es aber wegen der Unschärfe mit unendlich vielen "Sinuskurven" zu tun, die je nach Zustand unterschiedlich dicht liegen:



In der Draufsicht (links) ergibt sich also statt einer einzigen Kurve ein "Sinus-Band", dessen Breite variiert. In der 3D-Darstellung (rechts) wird die "Dichte der Kurven" (Hochachse) besser sichtbar. Im dargestellten Beispiel ist die Unschärfe der Amplitude größer als die Unschärfe der Phase, es ist also die Phase des Zustands gequetscht: man weiß ziemlich genau, wann der "Oszillator die Ruhelage passiert", dafür weiß man aber nicht genau wie weit er schwingt. Das gleiche Problem hat man übrigens auch, wenn man das Feld einer klassischen elektromagnetischen Welle quantenmechanisch beschreiben will.

Siehe auch:

- [Gequetschtes Licht](#)
- Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)
- Harmonischer Oszillator, [klassisch](#)

- [Wignerfunktion](#)

[Moderne Physik](#) mit Maple

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Gequetschte und gedrehte Zustände im Phasenraum

## Squeezed and rotated states in phase space

In Anlehnung an

Measurement of the quantum states of squeezed light

G. Breitenbach, S. Schiller &amp; J. Mlynek

NATURE VOL 387 129 MAY 1997

In der klassischen Physik lässt sich der Zustand eines Systems immer eindeutig angeben (prinzipiell jedenfalls), also graphisch oder geometrisch immer durch einen Punkt darstellen - egal in welchem Raum.

In der Quantenmechanik muss diese "exakte Beschreibung" durch "unscharfe Zustände" ersetzt werden, weil das Produkt der Unschärfen kanonisch konjugierter Variablen (z.B. Ort und Impuls) nicht Null werden kann. Aus Kurven im Phasenraum werden also Verteilungen im Phasenraum: [Kleines 1 x 1 quantenmechanischer Zustände im Phasenraum.](#)

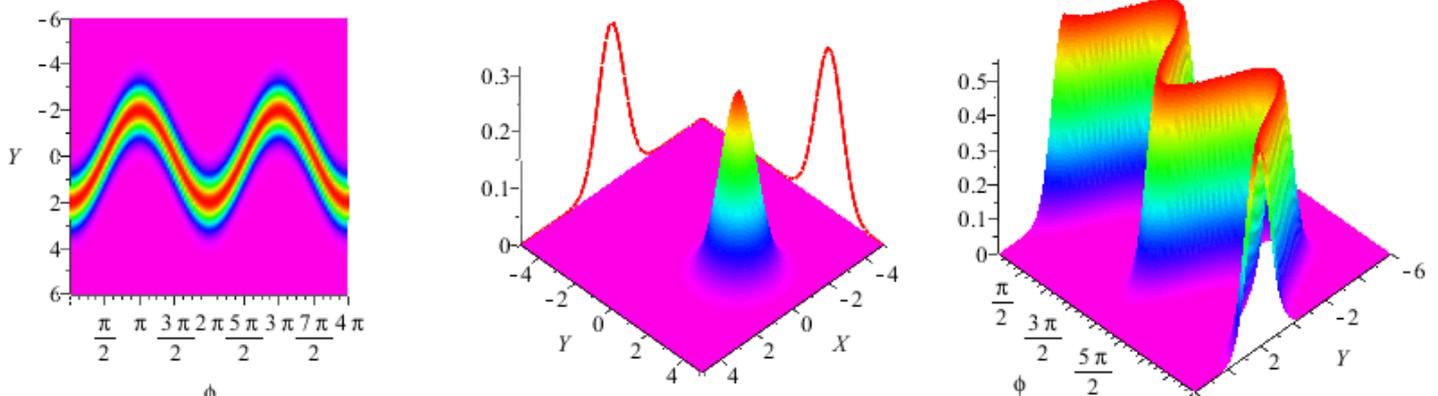
Dieser Artikel zeigt Beispiele aus der Quantenoptik.

Eine beliebte Fragestellung lautet: Was wird aus der elektrischen Feldstärke einer klassischen elektromagnetischen Welle in der "quantenmechanischen Beschreibung"?

Wenn man einen "klassischen Zustand" (E-Feld) möglichst gut quantenmechanisch beschreiben will, geht das am besten mit Gaußverteilungen (genauer gesagt Wigner-Verteilungen). Dieser Ansatz führt zunächst auf "kohärente Zustände".

Kohärente Zustände (coherent states):

In kohärenten Zuständen des Lichts, wenn also die "Photonenstatistik" durch eine Poissonverteilung beschrieben wird, ist die Wignerfunktion  $W$  eine symmetrische Gaußverteilung (Animationen in der Mitte, Hochachse:  $W$  oder  $P[Rand]$ ) und die Randverteilungen  $P[Rand]$  sind Gaußpakete, die ihre Form beibehalten. Trägt man eine der Randverteilungen (z.B.  $Y$ ) über dem Phasenwinkel (der zeitlichen Entwicklung) ab, so entsteht in der Draufsicht (links) ein sinusförmiges Band, d.h., man erhält weder für die Amplitude ( $Y$ ) noch für die Phase  $\Phi$  der elektrischen Feldstärke scharfe Werte, sondern neben dem zentralen Maximum (rot) weitere Werte mit abnehmender Wahrscheinlichkeit. Die 3D-Darstellung (rechts) ist eine weitere Möglichkeit der Veranschaulichung.

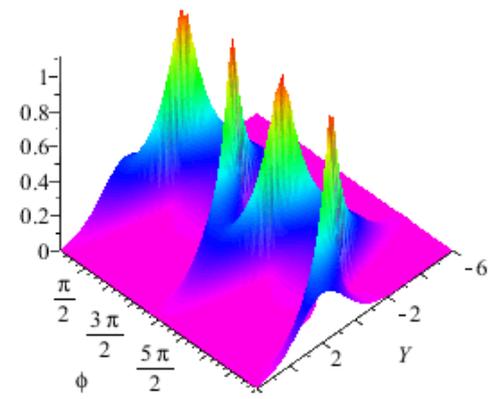
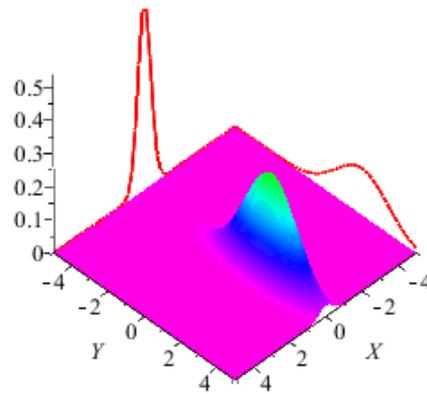
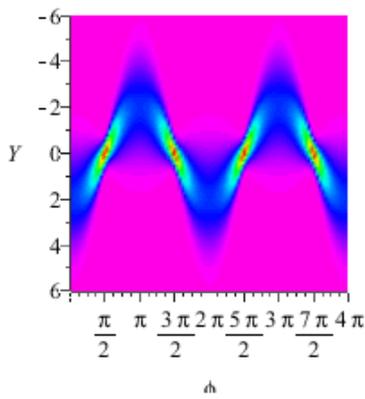


Anmerkung: Die Randverteilungen sind nicht der Schattenwurf (die Projektion) der Wignerverteilung auf eine Koordinatenebene, sondern das Integral über die Wignerverteilung (parallel zu einer Koordinate). Der Maßstab ist so gewählt, dass alle Verteilungen etwa gleich hoch sind.

Wichtiger: Selbst bei kohärentem Licht (Laser) lässt sich die elektrische Feldstärke nicht wie bei einer klassischen elektromagnetischen Welle bestimmen. Bei Experimenten, die den Charakter des Lichts untersuchen, geht man so vor, dass man das Rauschen misst, also Photonen zählt. Damit erhält man ein Muster von Punkten, die wie in der linken Abbildung mehr oder weniger dicht liegen. Aus diesem Muster schließt man dann über die Randverteilungen auf die zugehörige Wignerverteilung. Leider geht das nicht in Echtzeit, sondern nur mit ausgeklügelten Methoden (-> Homodyne Detektor), die das Lichtfeld (Frequenz einige 100THz) mit etwa 10Hz "scannen" und so das Bild eines "quantenmechanischen Oszillators in Zeitlupe" liefern. Die gezeigten Abbildungen sollten also nicht so (naiv) interpretiert werden, dass hier "die elektrische Feldstärke von Licht" zu sehen ist.

Außer kohärentem Licht kann man auch andere Sorten von Licht herstellen.

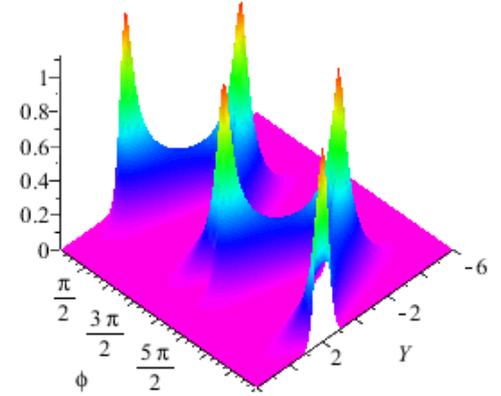
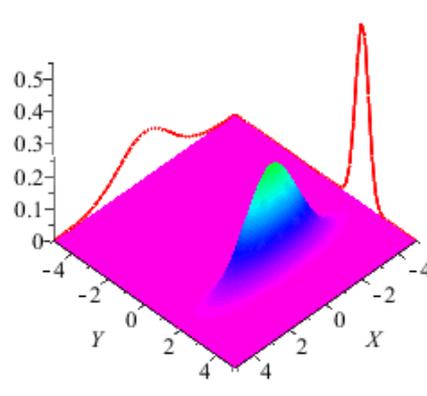
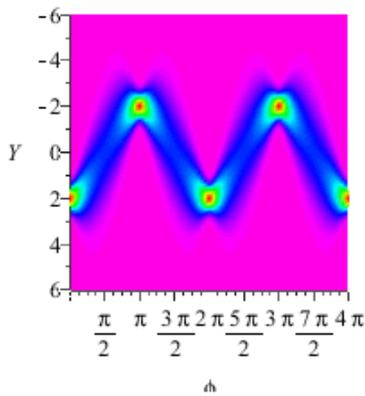
Phase gequetscht (phase-squeezed):



Diese Lichtsorte könnte man so charakterisieren: Die Phase (Phasenverschiebung) der Schwingung ist relativ gut bekannt, dafür ist aber die Amplitude relativ unbekannt. (Grobes Modell: man zeichnet sinusförmige Kurven mit gleicher Phasenverschiebung (und Frequenz) aber unterschiedlicher Amplitude.)

Das Gegenstück (die andere Quadraturkomponente) gibt es auch.

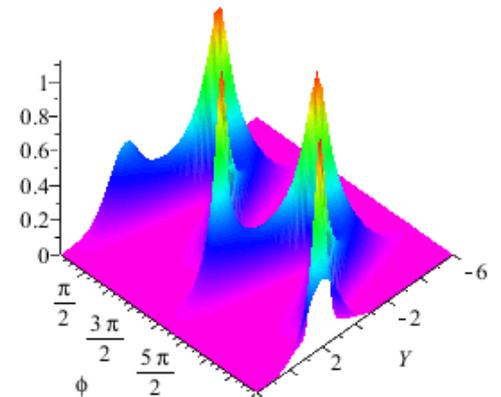
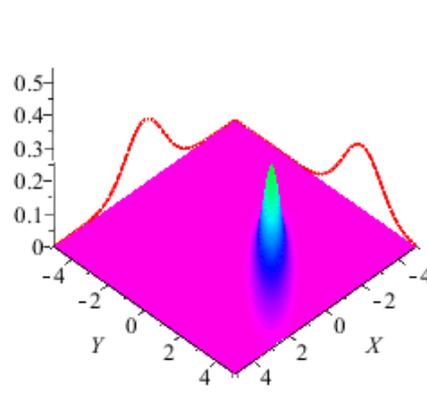
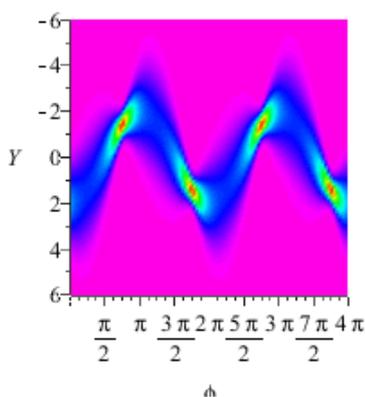
Amplitude gequetscht (amplitude-squeezed):



Diese Lichtsorte könnte man so charakterisieren: Die Amplitude der Schwingung ist relativ gut bekannt, dafür ist aber die Phase relativ unbekannt. (Grobes Modell: man zeichnet sinusförmige Kurven mit gleicher Amplitude (und Frequenz) aber unterschiedlicher Phasenverschiebung.)

Natürlich gibt es auch etwas dazwischen, z.B.:

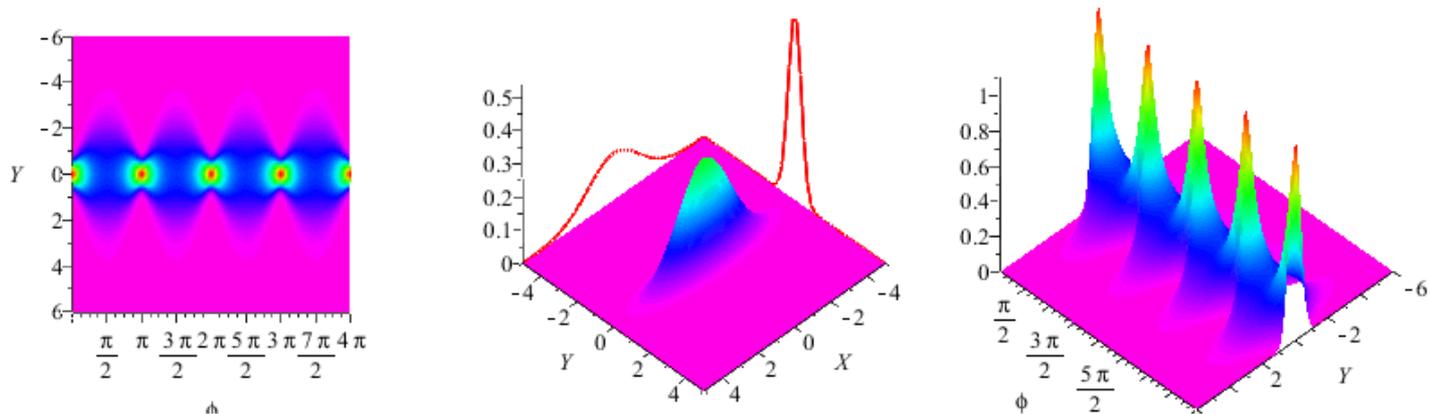
45° gedreht (und gequetscht):



Zur Übung: Wie lässt sich diese Lichtsorte charakterisieren und skizzieren?

Aber es kommt noch besser: Man braucht für diese Experimente gar kein Licht!

Gequetschtes Vakuum:



Nun ja, dass man auch ohne Signal Rauschen empfängt wissen wir, wenn der Fernsehsender ausfällt (nur wenn er ausfällt?). Aber dieses Rauschen kommt wirklich aus dem Nichts. Und dann lässt es sich auch noch zu einem Signal quetschen!

Siehe auch:

- [Kleines 1 x 1 quantenmechanischer Zustände im Phasenraum](#)
- Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)
- Harmonischer Oszillator, [klassisch](#)
- [Wignerfunktion](#)

Literatur:

Measurement of the quantum states of squeezed light, G. Breitenbach, S. Schiller & J. Mlynek, NATURE VOL 387 129 MAY 1997

Quantum Optics in Phase Space, Wolfgang P. Schleich, Wiley-VCH

[Moderne Physik](#) mit Maple

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Frequenzkamm

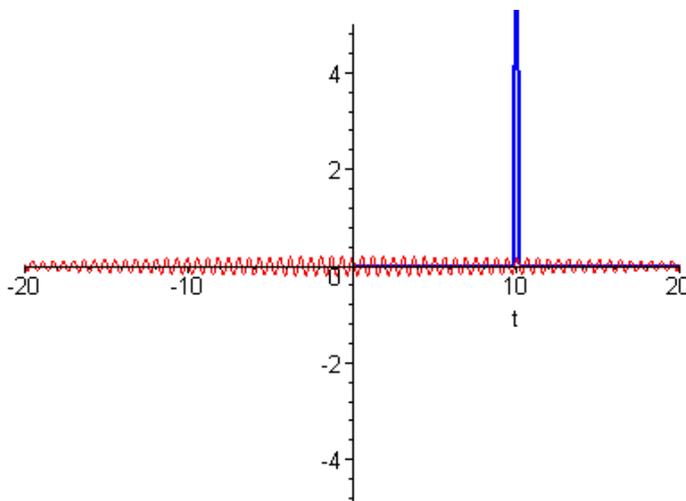
Der optische Frequenzkamm ist nicht nur ein schönes Beispiel für Fouriertransformationen. Bekommt man ihn in den Griff - was derzeit immer besser gelingt -, kann man damit Frequenzen mit astronomischer Genauigkeit messen und kontrollieren, was bisher ungeahnte Folgen für uns alle haben wird - von der Grundlagenforschung (z.B. Astronomie) bis zur täglichen Anwendung (z.B. Signalübertragung).

Was muss man in den Griff bekommen? Die Fouriertransformation, also den Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Verlauf einer Schwingung (oder Welle) und ihrem Frequenzspektrum. Allerdings handelt es sich dabei um ein Naturgesetz - und zwar ein ganz zentrales. Also sollte man statt "in den Griff bekommen" besser sagen "geschickt nutzen".

Zunächst ein allseits bekannter Zusammenhang: Zu einem aperiodischen Vorgang gehört ein kontinuierliches Frequenzspektrum. Dabei gilt: je kürzer der Vorgang, desto breiter das Spektrum (Blitz, Schlag mit einem Hammer).

Die blaue Kurve zeigt die Frequenzspektren, die rote den zeitlichen Verlauf der Schwingung. Das Produkt der Varianzen der beiden Verteilungen ist konstant ("Unschärferelation").

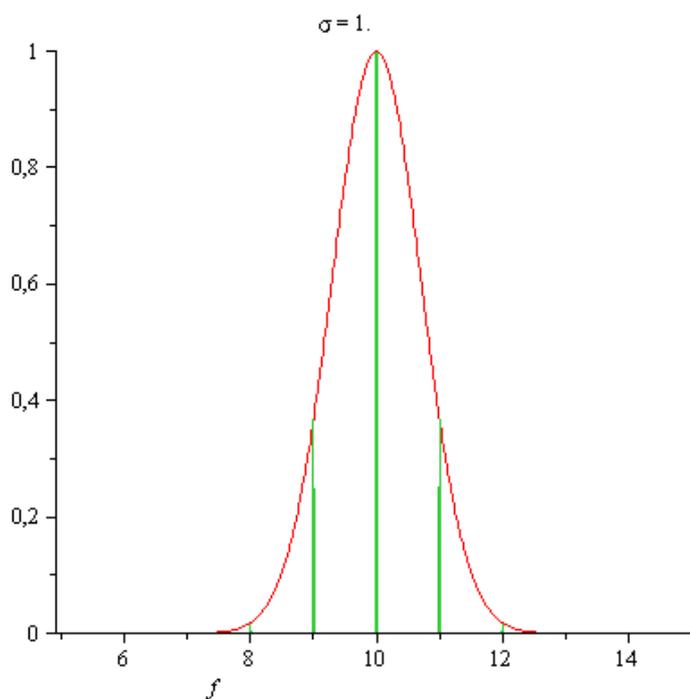
[Siehe auch:](#)  
[Fouriertransformation mit Maple.](#)  
[FFT mit Maple](#)



Umgekehrt gilt aber auch: Zu einem periodischen Vorgang gehört ein diskretes Frequenzspektrum (Linien). Gibt es auch Mischformen?

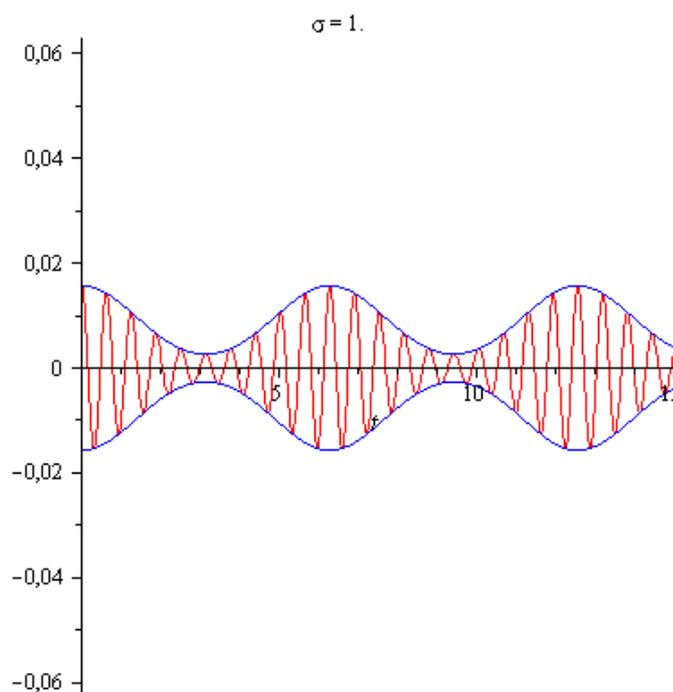
In den folgenden Animationen ist jeweils links das Spektrum dargestellt und rechts die zugehörige Schwingung (willkürliche Einheiten).

Frequenz

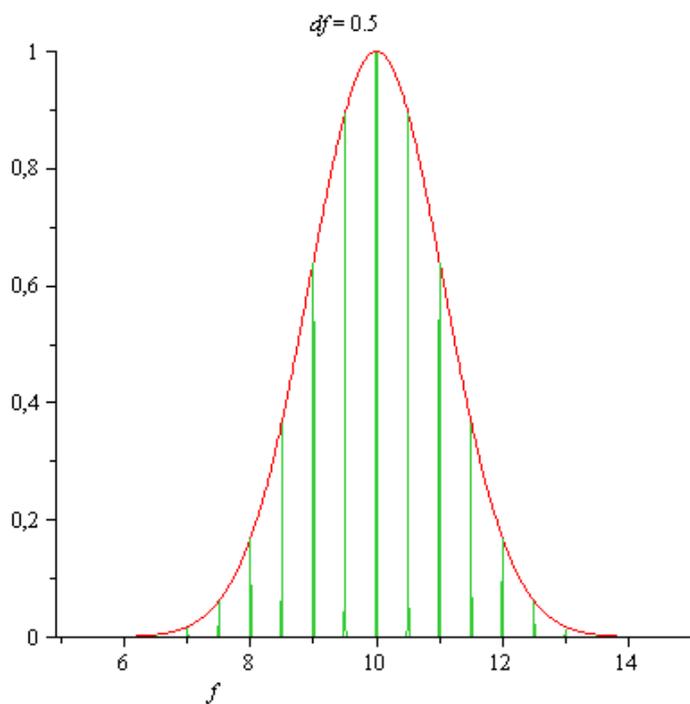


Zunächst wird bei festem Linienabstand (grün - die Zinken des Frequenzkamms) die Breite  $\sigma$  der Gaußverteilung (rot) verbreitert.

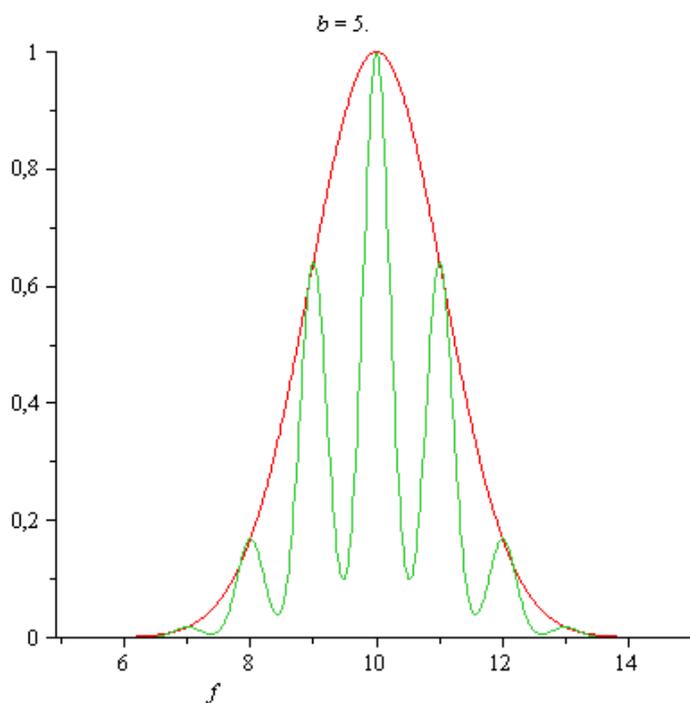
Zeit



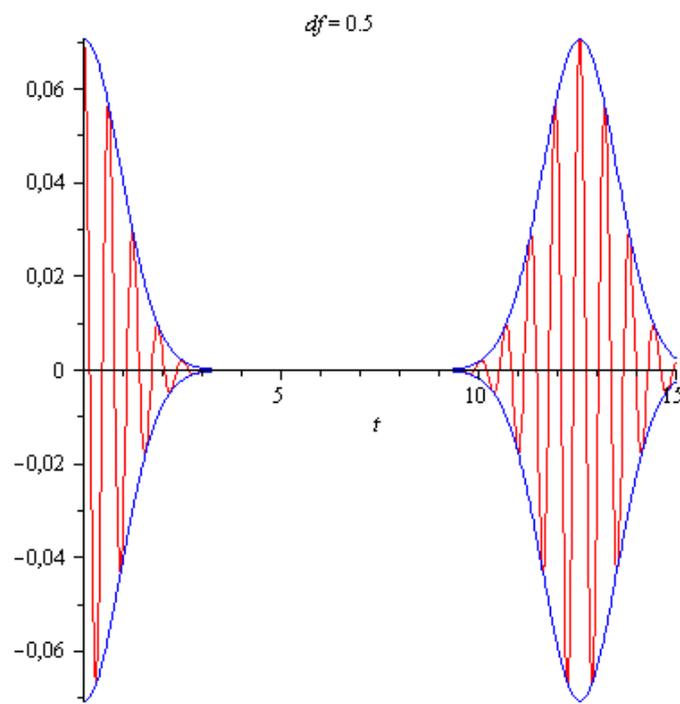
Dies hat zur Folge, dass wie bei einem aperiodischen Vorgang die Dauer der Pulse (blaue Einhüllende) abnimmt.



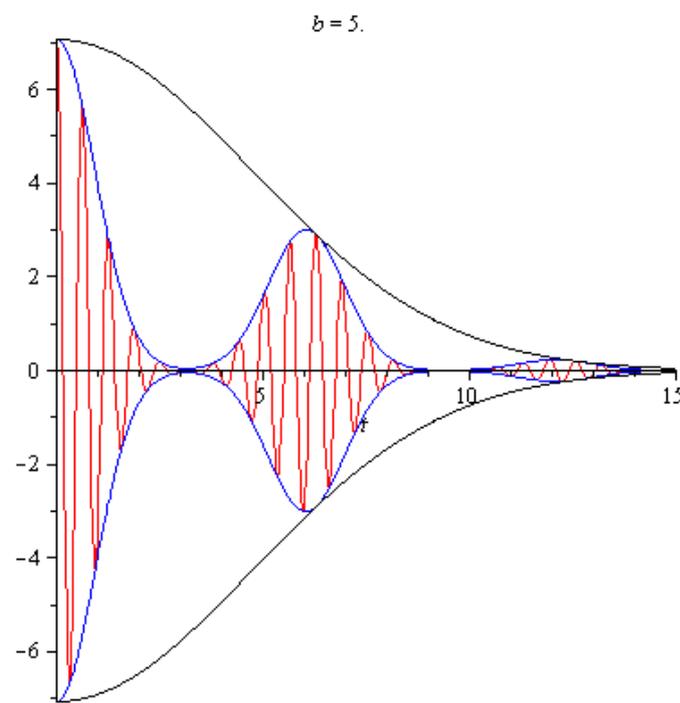
Verbreitert man den Abstand  $df$  der äquidistanten Linien...



Im realen Experiment hat man keine unendlich scharfen Linien. Wie wirkt sich das aus? (Der Parameter  $b$  bedeutet: die grünen Linien haben die Breite  $\sigma/b$ .)



so wird der zeitliche Abstand der Pulse kleiner (die Schwebungsfrequenz wird größer). Der aufmerksame Betrachter stellt fest, dass nun die Maxima der Einhüllenden (meistens) nicht mehr mit einem Maximum der Schwingungskurve zusammenfallen: Phasenschlupf.



Die Einhüllende (schwarz) der Einhüllenden (blau) hat eine geringe Breite, wenn die Linien eine große Breite haben. Spätestens hier fängt die Experimentierkunst an!

Gibt es also auch Mischformen? Natürlich! Die Natur hält sich nicht an unsere Idealisierungen "diskret - kontinuierlich"!

Und... natürlich kann man die Darstellungen auch von rechts nach links lesen: eine Seite ist die Fouriertransformierte der anderen - mit Maple erzeugt und in einem Maple-Worksheet interaktiv manipulierbar.

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Der harmonische Oszillator, quantenmechanisch

Beitrag zur [Fortbildung Quantenphysik 2003](#)

Der harmonische Oszillator spielt auch in der Quantenphysik eine wichtige Rolle. Das quadratische Potential kommt zwar in der Realität nicht vor, ist aber eine bequeme Näherung für ein Potential mit einem Minimum, in der sich die Zustände (Lösungen der Schrödingergleichung) geschlossen berechnen lassen. Das Modell eignet sich nicht nur für den Vergleich der klassischen und quantenmechanischen Beschreibung der "harmonischen Schwingung eines Teilchens", sondern hat eine zentrale Bedeutung bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes.

Auszug aus einem Maple-Worksheet:

Stationäre Lösung der Schrödingergleichung für den harmonischen Oszillator ( $\sigma=1$ , HermiteH(n,x) sind die Hermitepolynome)

`>u:=(n,x)->1/sqrt(2^n*n!)*Pi^(-1/4)*HermiteH(n,x)*exp(-x^2/2);`

$$u := (n, x) \rightarrow \frac{\text{HermiteH}(n, x) e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2^n n!} \pi^{\frac{1}{4}}}$$

Die Energieniveaus sind diskret und äquidistant. Der Grundzustand hat nicht die Energie Null. In Einheiten  $h \cdot f$  ( $h =$  Wirkungsquantum,  $f =$  Frequenz des (klassischen) Oszillators):

`>E:=n->n+1/2;`

$$E = n \rightarrow n + \frac{1}{2}$$

Potential ("Federkonstante" = 1):

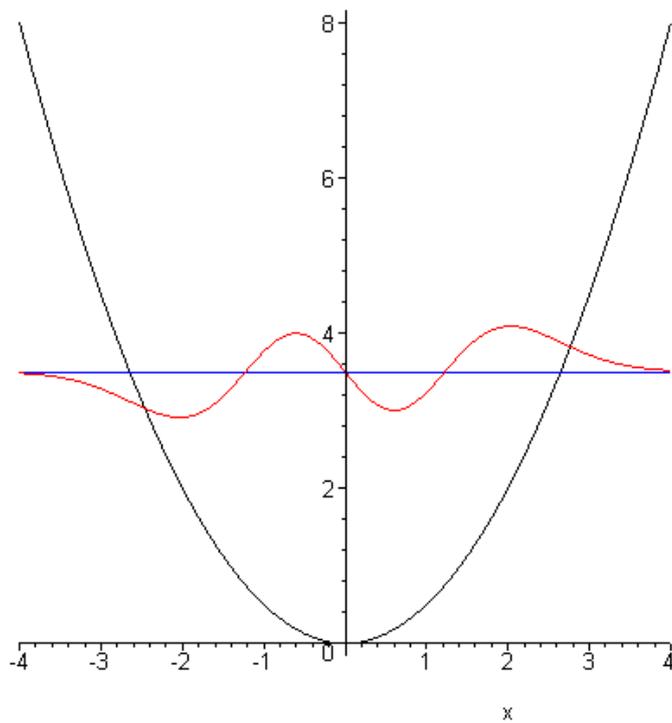
`>V:=x->x^2/2;`

$$V = x \rightarrow \frac{1}{2}x^2$$

Darstellung für  $n = 3$

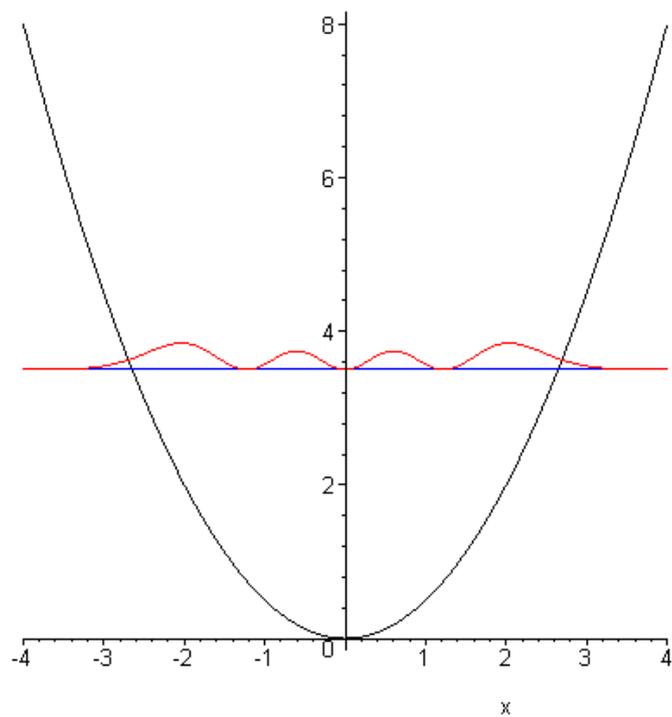
Realteil der Wahrscheinlichkeitsamplitude:

`>plot([u(3,x)+E(3),E(3),V(x)],x=-4..4,color=[red,blue,black]);`



Betragsquadrat der W-Amplitude = Wahrscheinlichkeitsdichte

```
>plot([u(3,x)^2+E(3),E(3),V(x)],x=-4..4,color=[red,blue,black]);
```



Vergleich mit der klassischen Wahrscheinlichkeits-Verteilung

Klassische W-Dichte

```
>rhoklass:=n->1/(Pi*sqrt((2*E(n))-x^2));
```

$$\text{rhoklass} := n \rightarrow \frac{1}{\pi \sqrt{2 E(n) - x^2}}$$

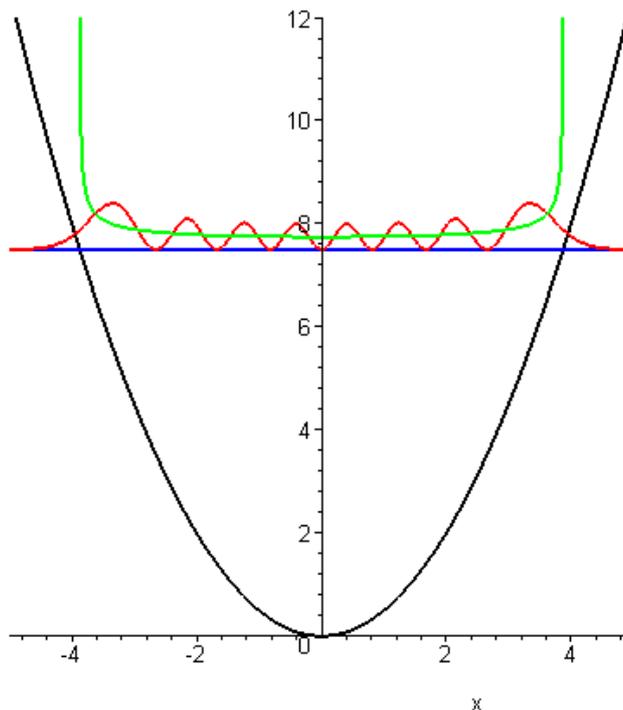
```
>int(rhoklass(13),x=0..sqrt(2*E(13)));
```

$$\frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen auf einer Hälfte der Schwingung anzutreffen, ist also 1/2 (nicht nur für n = 13 :-).

Vergleich der W-Dichten für eine bestimmte (scharfe) Energie:

```
>plot([3*rhoklass(7)+E(7),3*u(7,x)^2+E(7),E(7),V(x)],x=-5..5,0..12,color=[green,red,blue,black],thickness=2);
```



Im Gegensatz zur klassischen W-Dichte (grün) oszilliert die quantenmechanische (rot). An manchen Stellen ist sie sogar Null wie bei einer stehenden Welle. Darüberhinaus hält sich das quantenmechanische Teilchen nicht an die Energieerhaltung, sondern tunnelt an den klassischen Umkehrpunkten (Schnittpunkt von blau mit schwarz) über den erlaubten Bereich hinaus.

Das sind doch gravierende Unterschiede der beiden Beschreibungen!

Allerdings haben wir bisher nur stationäre Zustände untersucht, bei denen sich nichts bewegt. Wir berücksichtigen zunächst die Zeitabhängigkeit der stationären Zustände:

Zeitabhängigkeit

```
>psi:=(n,x,t)->u(n,x)*exp(-I*E(n)*t);
```

$$\psi := (n, x, t) \rightarrow u(n, x) e^{(-I E(n) t)}$$

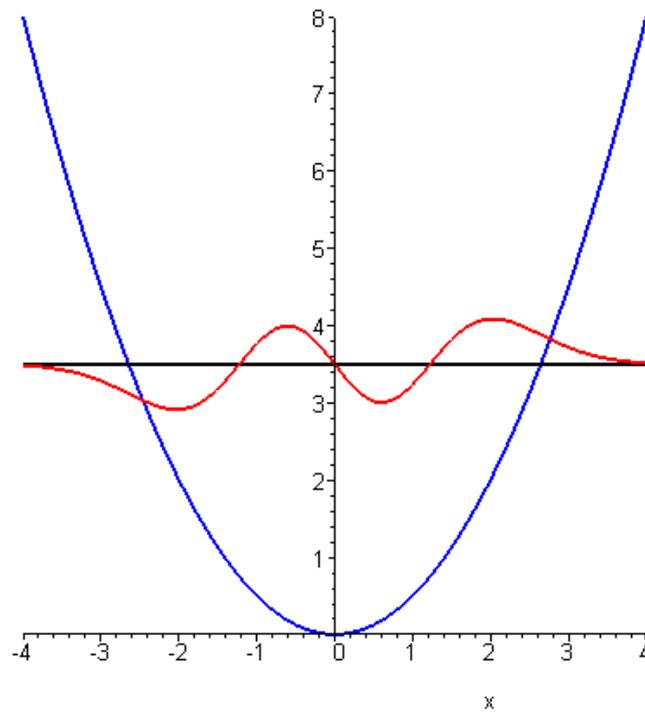
Im Gegensatz zum klassischen Oszillator ändert sich die Frequenz und Schwingungsdauer des Zustandes mit der Energie.

```
>T:=n->2*Pi/E(n);
```

$$T := n \rightarrow \frac{2 \pi}{E(n)}$$

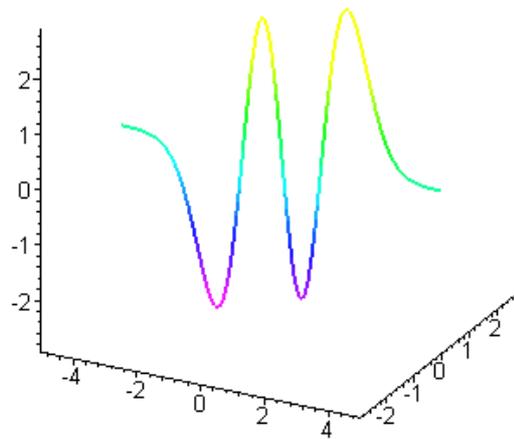
Animation des Realteils der Zustandsfunktion

```
>display([seq(plot([evalc(Re(psi(3,x,t)))+E(3),E(3),V(x)],x=-4..4,color=[red,black,blue],thickness=2),t=seq(T(3)*i/50,i=0..49)),insequence=true);
```



Das ist nur die halbe Wahrheit, denn die Zustandsfunktion ist komplex (Realteil noch oben, Imaginärteil nach hinten):

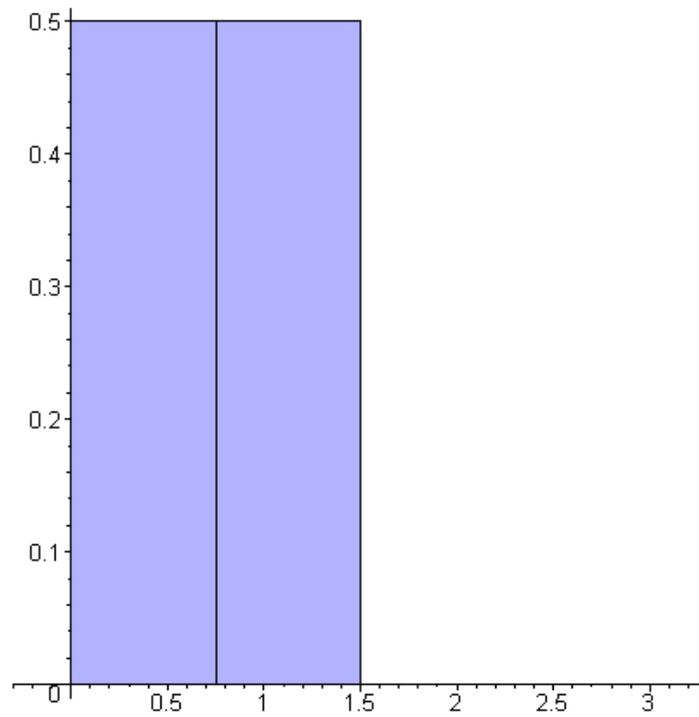
```
> display([seq(spacecurve([x,5*evalc(Im(psi(3,x,t))),5*evalc(Re(psi(3,x,t))]),x=-5..5,axes=frame,numpoints=250,shading=ZHUE,thickness=2),t=seq(T(3)*i/48,i=0..47)),insequence=true);
```



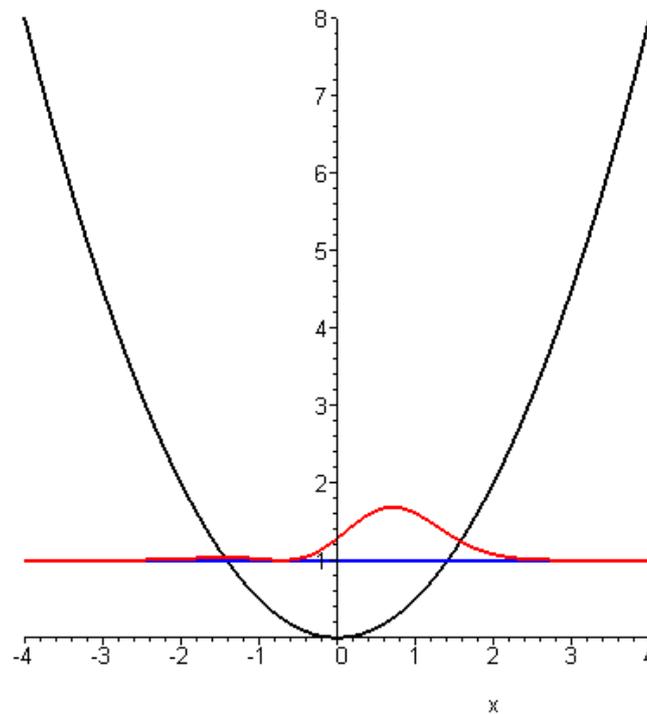
Nun gut "die Zustandsfunktion rotiert". Nach wie vor ist aber keine klassische Schwingung in horizontale Richtung zu sehen. Das ändert sich aber, wenn man Zustände überlagert:

Überlagerung von Zuständen

Grundzustand und "erste Oberschwingung" mit gleichem Gewicht:



```
> display([seq(plot([evalc(abs(psig))^2+Eq,Eq,V(x)],x=-4..4,color=[red,blue,black],thickness=2),t=seq(2*Pi*i/48,i=0..47)),insequence=true);
```



Aha! Mit etwas Phantasie kann man sich vorstellen, dass hier ein Teilchen horizontal schwingt. In den Umkehrpunkten hält es sich länger auf als im Nulldurchgang. Gibt es für die Überlagerung der Zustände (stationäre Eigenfunktionen) eine Gewichtung, die der klassischen Vorstellung etwas näher kommt?

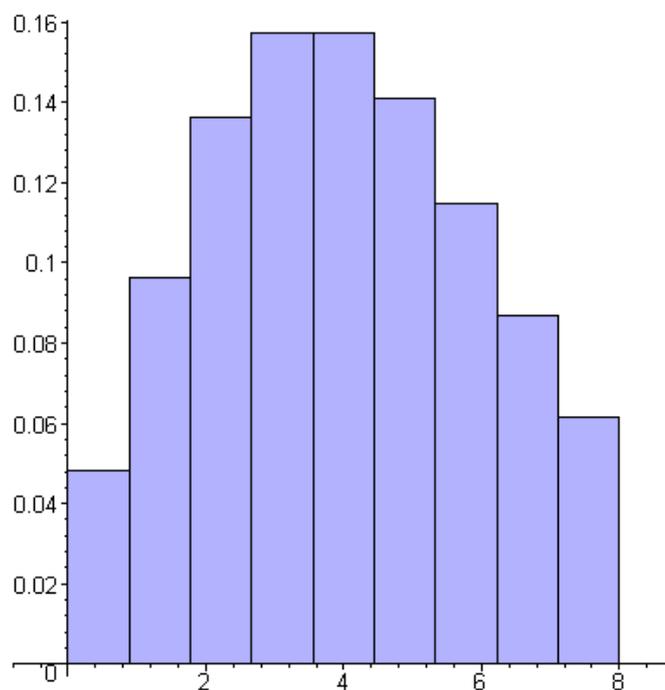
Poissonverteilung für kohärente Zustände (Schrödinger)

Gewichte der Amplituden (Wurzel aus Poissonverteilung mit Mittelwert  $\lambda^2$ ):

```
> af:=n->lambda^n/sqrt(n!)*exp(-lambda^2/2);
```

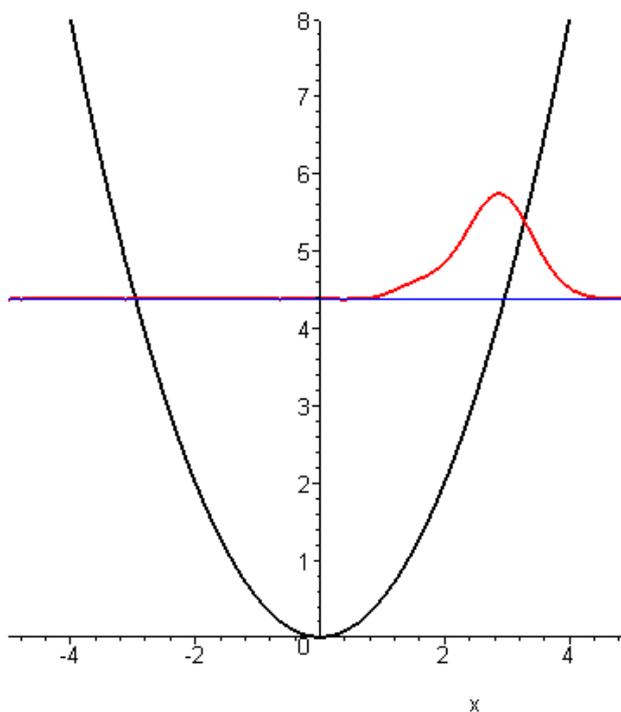
$$a_f := n \rightarrow \frac{\lambda^n e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{\sqrt{n!}}$$

Histogramm der Gewichte (bis zu  $n = 8$ )

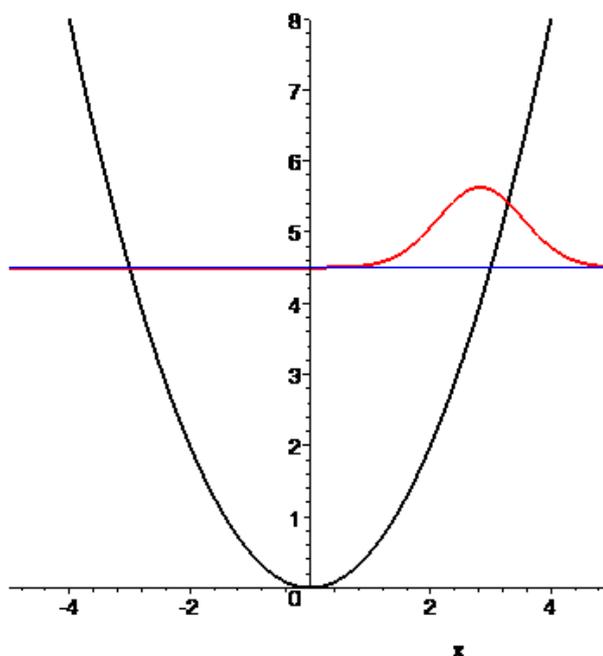
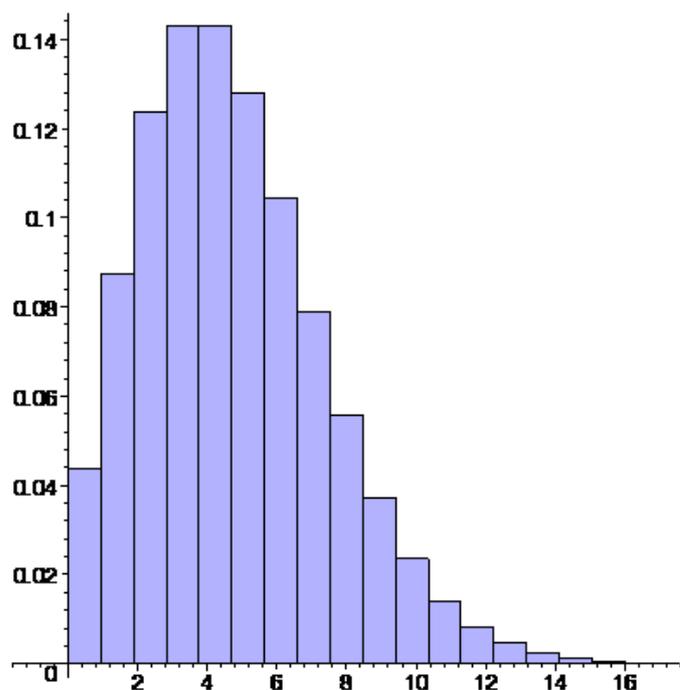


Damit lässt sich tatsächlich ein Paket aufbauen. Das Betragsquadrat sieht so aus...

```
> display([seq(plot([Eq, 2*psigabs+Eq, V(x)], x=-5..5, 0..8, color=[blue, red, black], thickness=[1, 2, 2]), t=seq(2*Pi*i/96, i=0..95)), insequence=true);
```



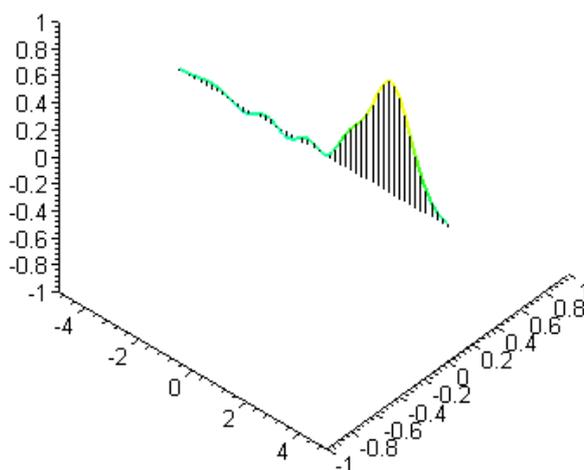
... und schwingt horizontal. Fügt man noch weitere Oberschwingungen hinzu, schwingt ein Gaußpaket ohne Formänderung horizontal:



Aber Vorsicht mit Analogien! Insbesondere der Vergleich mit einer Kugel, die im "Schwerefeld auf einer Parabelbahn rollt", ist nicht angebracht, siehe ["Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerefeld"](#).

Und hier ist wieder die volle Wahrheit ( $n = 8$ ):

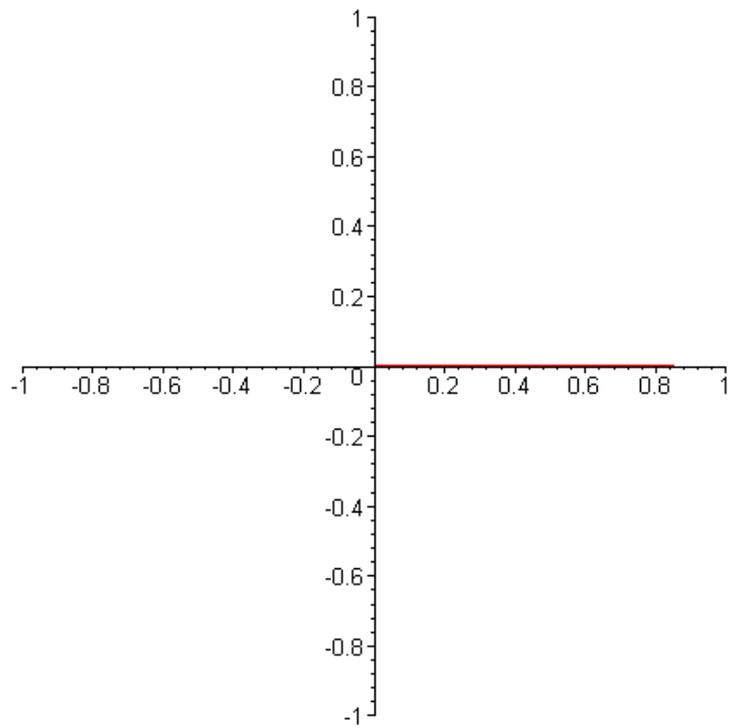
```
> display([seq(display([seq(pzeig(xx,t),xx=seq(k,k=seq(j/5,j=-25..25))),spacecurve(psigspace(x,t),x=-5..5,axes=frame,numpoints=250,shading=ZHUE,thickness=2)),t=seq(4*Pi*i/96,i=0..95))],insequence=true);
```



Wenn man die Zustandsfunktion mit Real- und Imaginärteil darstellt, wird deutlich, was sich hinter den Kulissen abspielt. Die komplexen Zahlen sind durch "Zeiger" (schwarze Linien) dargestellt.

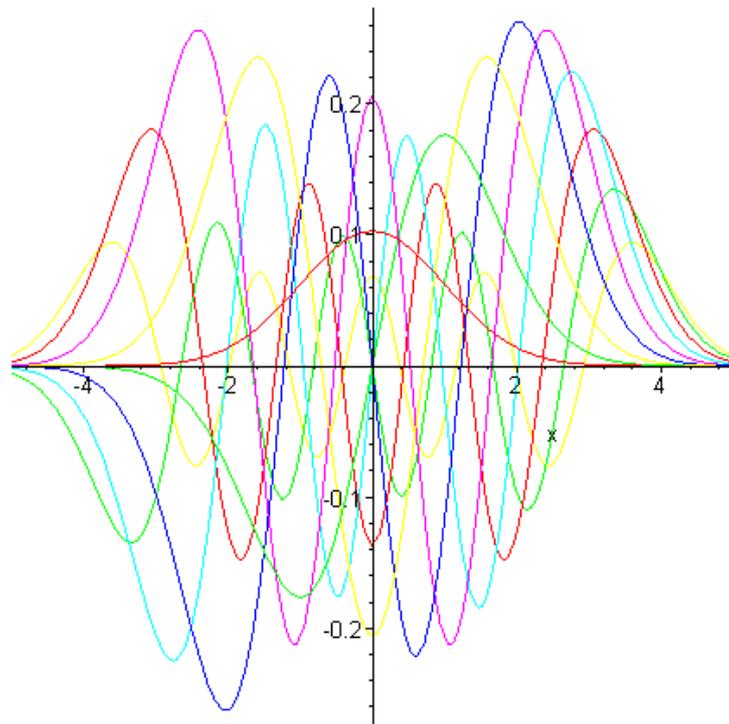
Dabei kommt ein Zeiger so zustande (exemplarisch):

```
> display([seq(display([plot([0,0],seq(p[i],i=1..nmax)),color=red),plot([p[nmax],[0,0]],color=black)),thickness=2),t=seq(4*Pi*i/96,i=0..95))],insequence=true);
```



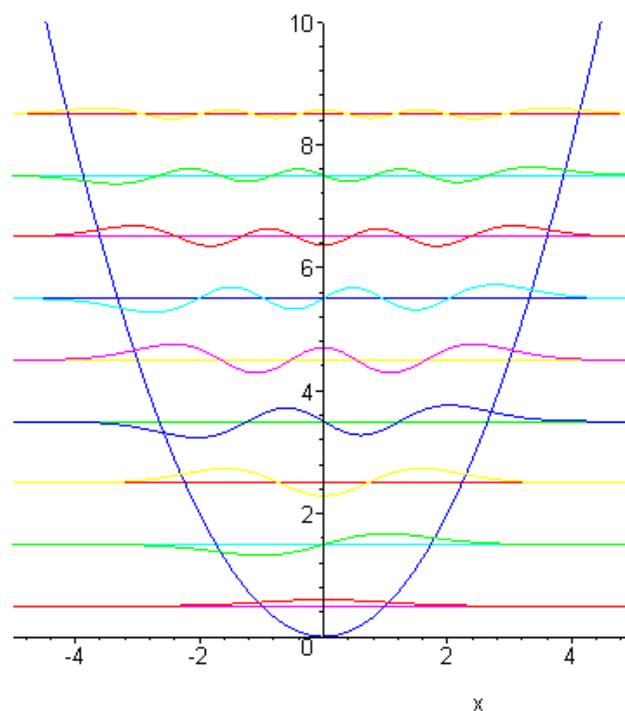
Hier sind noch einmal die gewichteten Eigenfunktionen (Poissonverteilung):

```
>plot([seq(av[i]*psiv[i],i=1..nmax)],x=-5..5);
```



Etwas übersichtlicher auf der Höhe der Energieen abgetragen

```
>plot([seq(av[i]*psiv[i]+Ev[i],i=1..nmax),V(x),seq(Ev[i],i=1..nmax)],x=-5..5,0..10);
```



Zusammenfassung:

- Die "klassische Bewegung" entsteht in der quantenmechanischen Beschreibung erst durch Überlagerung von Zuständen (die es beim klassischen Oszillator nicht gibt).
- Die Bewegung hat dann die Differenzfrequenz benachbarter Zustände (wie bei der [Abstrahlung im Atom](#)). Die Besonderheit des quantenmechanischen Oszillators ist, dass diese Zustände äquidistant liegen (Energie oder Frequenz) und somit die die Fourierreihe die Differenzfrequenz benachbarter Zustände als Frequenz des klassischen Oszillators liefert.
- Die Vorstellung, dass die quantenmechanische Beschreibung die Amplitude des klassischen Oszillators (direkt) quantisiert, ist falsch, denn der Mittelwert der Verteilung kann alle Werte annehmen.

Siehe auch: harmonischer Oszillator, [klassisch](#)

[Zurück zum Inhalt](#) (Fortbildung zur QPh 2003, Mathematische Behandlung der Schrödingergleichung)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Energiestromung bei der Absorption eines Photons

- ganz klassisch -

Im Ursprung befindet sich ein "punktförmiger" Hertzscher Dipol (z.B. ein Atom) mit einem Dipolmoment in Richtung der z-Achse (vertikal, geeignet normiert). Von links (negative x-Achse, geeignet normiert) kommt eine in z-Richtung polarisierte ebene Welle. Dipol und einfallende Welle schwingen in Phase.

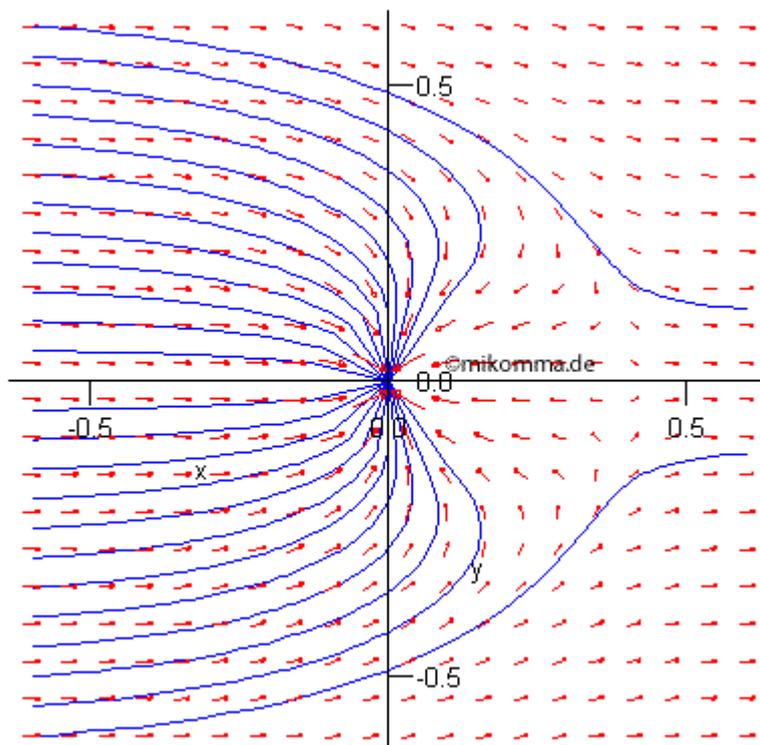
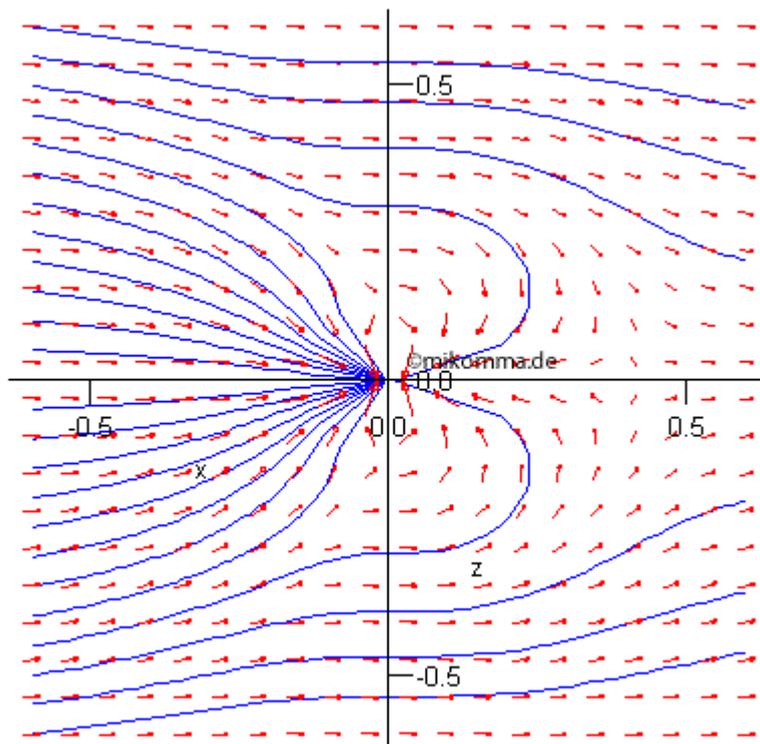
Wie geht die Energie der einfallenden Strahlung auf den Dipol (die Antenne, das Atom) über?

In der klassischen Physik berechnet man dazu den Poynting-Vektor (zeitlich gemittelt). Das zugehörige Vektorfeld ist durch die Pfeile dargestellt (Pfeillänge in logarithmischem Maßstab wegen der Singularität im Ursprung). Die Flusslinien der Energiestromung erhält man durch Integration der zugehörigen Differentialgleichungen (numerisch mit Maple).

Dass die einströmende Energie vor dem Atom auf das Atom fokussiert wird, erwartet man intuitiv. Erstaunlich ist aber die Erkenntnis, dass es auch hinter dem Atom noch einen Bereich gibt, in dem die Flusslinien zum Atom zurückkehren.

Das vorangehende Bild zeigt einen Schnitt in der x-z-Ebene.

In der x-y-Ebene saugt das Atom noch mehr Energie aus der einfallenden Strahlung, hat einen noch größeren (differentiellen) Wirkungsquerschnitt.



Die räumliche Darstellung der Energiestromung ist nicht ganz einfach. Wir versuchen es zunächst mit einer Flusslinie. Mit der linken Maustaste kann das Bild gedreht werden. Mit der rechten Maustaste können weitere Optionen eingestellt werden... [3D-Flusslinie zeigen](#)

Noch mehr Flusslinien gefällig? Kein Problem - alles nur eine Frage der Perspektive oder der passenden [Maustaste](#).

Aber wie findet nun das Photon seinen Weg ins Atom?

- Nach Paul H., Fischer R., Light Absorption by a Dipole, Usp. fiz. nauk 141, 375 (1983)
- Berechnung der Bilder mit Maple, Export nach HTML mit JavaView.

['Moderne Physik mit Maple'](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

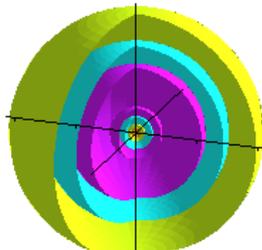
[Quantenphysik](#)

[Top](#)

# H-Orbitals

© 2002 Michael Komma

Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Wasserstoffelektrons für verschiedene Quantenzahlen. (Auszug aus einem Maple-Worksheet, bzw. Maplet.)



$[n,l,m]=[1,0,0]$

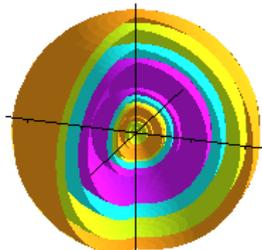
Der Grundzustand:  $n = 1, l = 0, m = 0$

Für alle Darstellungen wurden vier Dichten ausgewählt (die Dichte fällt von violett nach gelb/rot). Um die räumliche Darstellung zu verbessern, wurden "die Elektronenschalen beleuchtet".

Im Maple-Worksheet können die Dichten in ihrer Anzahl, Farbe und Beleuchtung variiert werden. Selbstverständlich kann man dort auch die gesamte Darstellung interaktiv mit der Maus in alle Richtungen drehen und die Winkel für den Ausschnitt vorgeben.

Aber was sieht man hier überhaupt? Im Grundzustand findet man das Elektron eines H-Atoms am ehesten dort, 'wo es violett ist' - also auf den Kugelschalen im violetten Bereich. Die mittlere Entfernung vom Kern (Proton - punktförmig im Ursprung) ist der Bohrsche Radius.

Die nachfolgenden Darstellungen sind jeweils so skaliert, dass der Bohrsche Radius bei einem Drittel des gesamten Bereichs liegt.

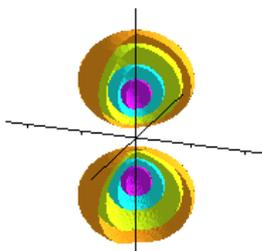


$[n,l,m]=[2,0,0]$

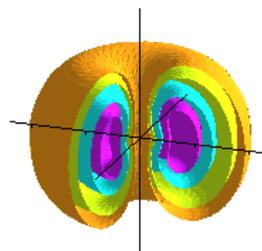
Der erste angeregte Zustand:  $n = 2, l = 0, m = 0$

Der Bohrsche Radius ist proportional zum Quadrat der Hauptquantenzahl  $n$ , d.h., im Vergleich zum Grundzustand haben die 'violetten Schalen' nun den vierfachen Radius. Die Verteilung ist für die Drehimpulsquantenzahl  $l = 0$  und die magnetische Quantenzahl  $m = 0$  wieder kugelsymmetrisch, aber in Kernnähe gibt es ein zweites Maximum der Dichte (grün).

Die nächsten beiden Orbitale sind nicht mehr kugelsymmetrisch, weil der Bahndrehimpuls von Null verschieden ist, wodurch eine Symmetrieachse festgelegt wird. Die ringförmige Verteilung für  $[n,l,m] = [2,1,1]$  entspricht am ehesten der klassischen Vorstellung eines Orbitals.



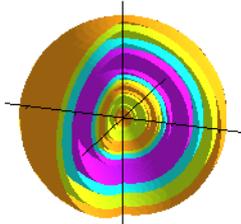
$[n,l,m]=[2,1,0]$



$[n,l,m]=[2,1,1]$

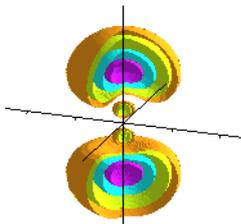
Aus diesen Zuständen kann das H-Atom in den Grundzustand übergehen.

Dabei sendet es [Dipolstrahlung](#) aus (bzw. ein dazu [passendes Photon](#) :-))

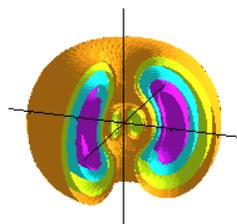


$[n,l,m]=[3,0,0]$

Das Atom ist nun neunmal so groß wie im Grundzustand und in Kernnähe bildet sich ein drittes Maximum der Dichte: Schalenmodell :-))

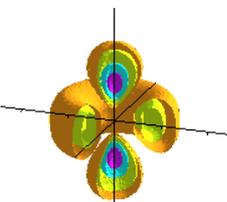


$[n,l,m]=[3,1,0]$

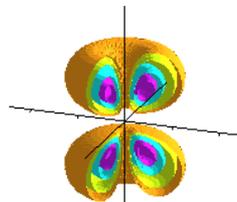


$[n,l,m]=[3,1,1]$

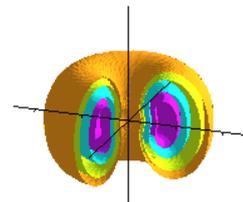
Wieder gibt es Dipolmomente und -übergänge, aber nun kommen auch Quadrupolverteilungen hinzu (s.u.):



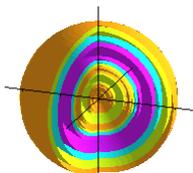
$[n,l,m]=[3,2,0]$



$[n,l,m]=[3,2,1]$



$[n,l,m]=[3,2,2]$

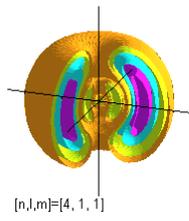
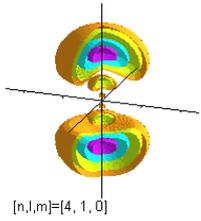


$[n,l,m]=[4,0,0]$

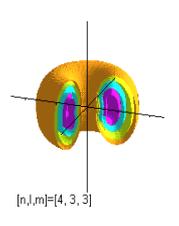
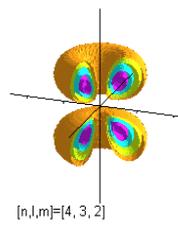
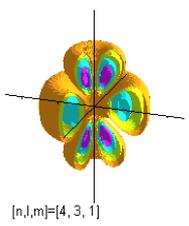
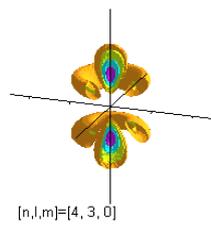
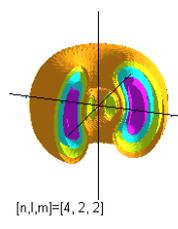
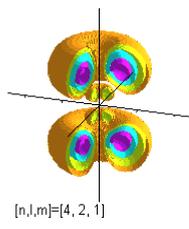
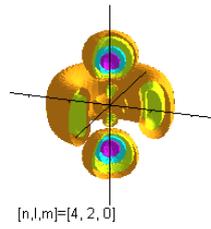
Wie groß ist das Atom nun?

Und die Multipolordnung wird höher und höher...

Dadurch ändert sich auch die [Strahlungscharakteristik](#) der



Übergänge.



Verwandte Themen:

[Multipolstrahlung](#)

[Quantensprung](#)

Aus [Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

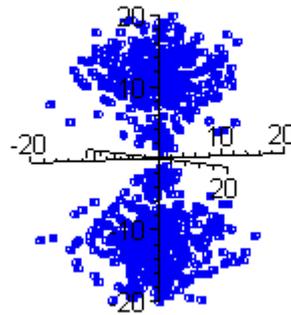
[Top](#)

## H-Orbitale in der statistischen Interpretation:

Hier finden Sie zunächst ein paar Skizzen. Das Inhaltsverzeichnis am Ende der Seite führt zu weiteren Experimenten mit dem H-Atom am Computer...

Man kann mit Maple leicht eine Punkteverteilung (Elektronenverteilung) erzeugen, deren Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons im H-Atom entspricht (oder in anderen Atomen).

Hier ein Beispiel für  $n = 3, l = m = 0$ :

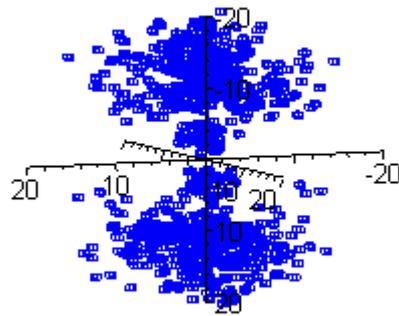


So kann man mehrere Elektronenwolken (zu einem Zustand) als Momentaufnahmen erzeugen:

```
> for k to 5 do
> wolke.k:=NULL:
> for i to azp do
w1:=winkel[1+trunc(zuf()/100*(azw-1))]:
w2:=evalf(zuf()/100*2*Pi):
wolke.k:=wolke.k,[punkte[i]*cos(w2)*sin(w1),punkte[i]*sin(w2)*sin(w1),punkte[i]*cos(w1)]:
od:
p.k:=pointplot3d([wolke.k],axes=normal,color=blue,symbol=box,scaling=constrained,view=[-20..20,-20..20,-20..20]):
od:
```

Und als Film ablaufen lassen

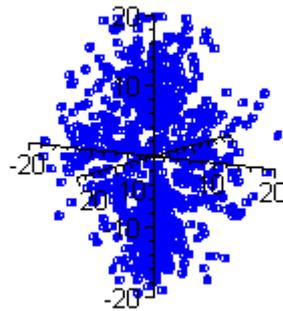
```
> display([seq(p.l,l=1..5)],insequence=true);
```



Wir ändern die Drehimpulsquantenzahl:

```
> l:=2;
```

$l=2$



```
> for k to 5 do
```

```
> wolke.k:=NULL:
```

```
> for i to azp do
```

```
w1:=winkel[1+trunc(zuf()/100*(azw-1))];
```

```
w2:=evalf(zuf()/100*2*Pi):
```

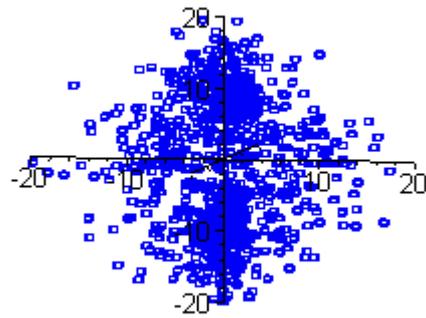
```
wolke.k:=wolke.k,[punkte[i]*cos(w2)*sin(w1),punkte[i]*sin(w2)*sin(w1),punkte[i]*cos(w1)];
```

```
od:
```

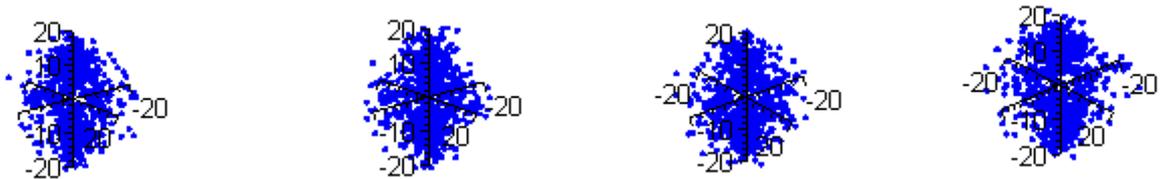
```
p.k:=pointplot3d([wolke.k],axes=normal,color=blue,symbol=box,scaling=constrained,view=[-20..20,-20..20,-20..20]);
```

```
od:
```

```
> display([seq(p.l,l=1..5)],insequence=true);
```

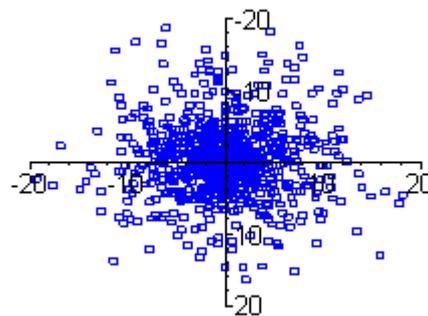


Vier Momentaufnahmen stehend:



Eine Momentaufnahme in verschiedenen Orientierungen:

> `display(seq(display(p1,orientation=[i^2/10,10*i]),i=0..35),insequence=true);`



More Hydrogen!

- Die [Formel](#)
- Neue [Parameter](#)
- Alle Zustände zu  $n = 3$ 
  - Im [Einzelnen und zusammen](#)

- Von [verschiedenen Seiten](#)
- Als [Film](#)
- Der [Quantensprung](#)

H-Orbitals aus '[Moderne Physik mit Maple](#)'

[komma@oe.uni-tuebingen.de](mailto:komma@oe.uni-tuebingen.de)

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

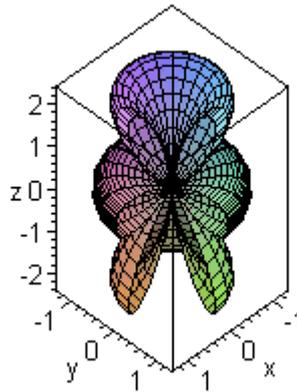
[Quantenphysik](#)

[Top](#)

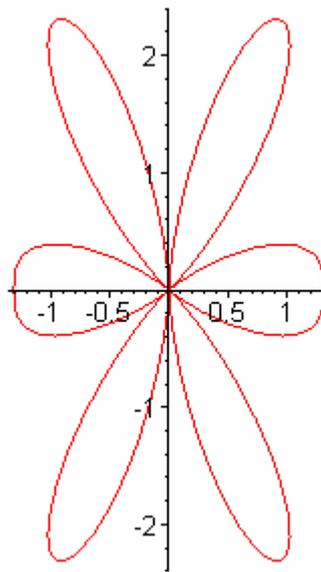
## H-Orbitals

In einem Maple-Worksheet lassen sich die Wasserstoff-Wellenfunktionen leicht zu beliebigen Quantenzahlen darstellen. Alle 3D-Plots können nun in Release 5 in Echtzeitrotation mit der Maus gedreht werden

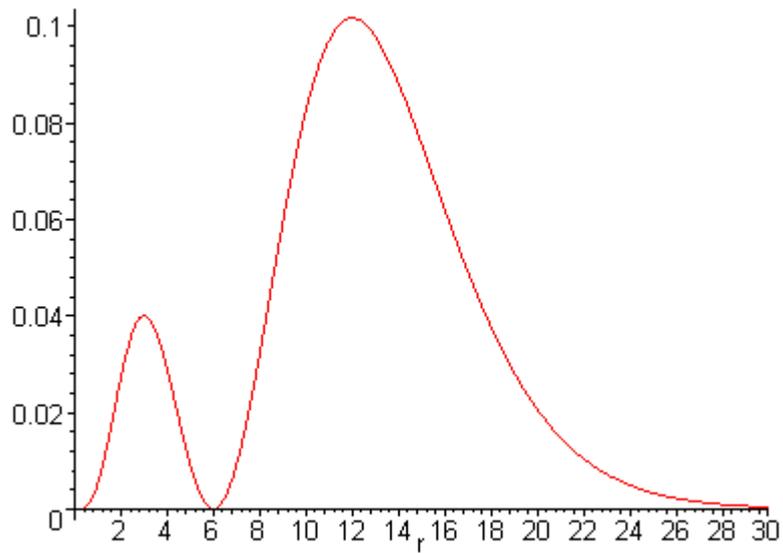
Eine Winkelverteilung  $Y$  in 3D-Darstellung



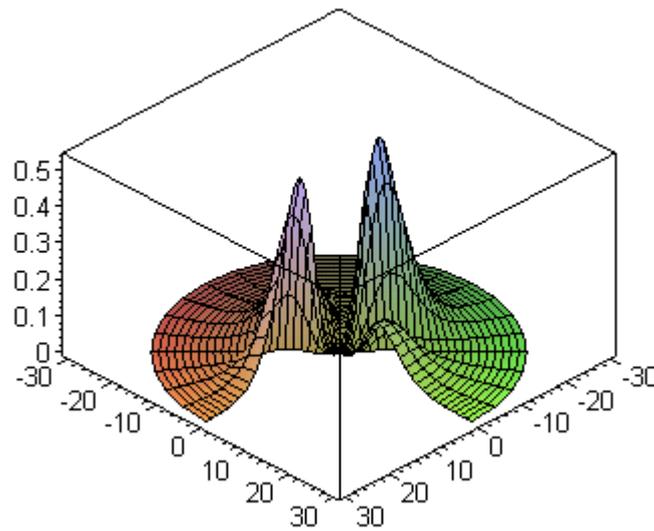
Oder als Polardiagramm



Nun die Radialfunktion  $R$

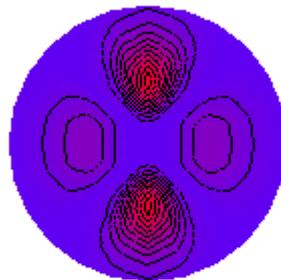


Will man außer der radialen Verteilung noch die Winkelabhängigkeit sehen, so stellt man das Produkt  $(r \cdot R \cdot Y)^2$  am besten dreidimensional und in Polarkoordinaten dar.

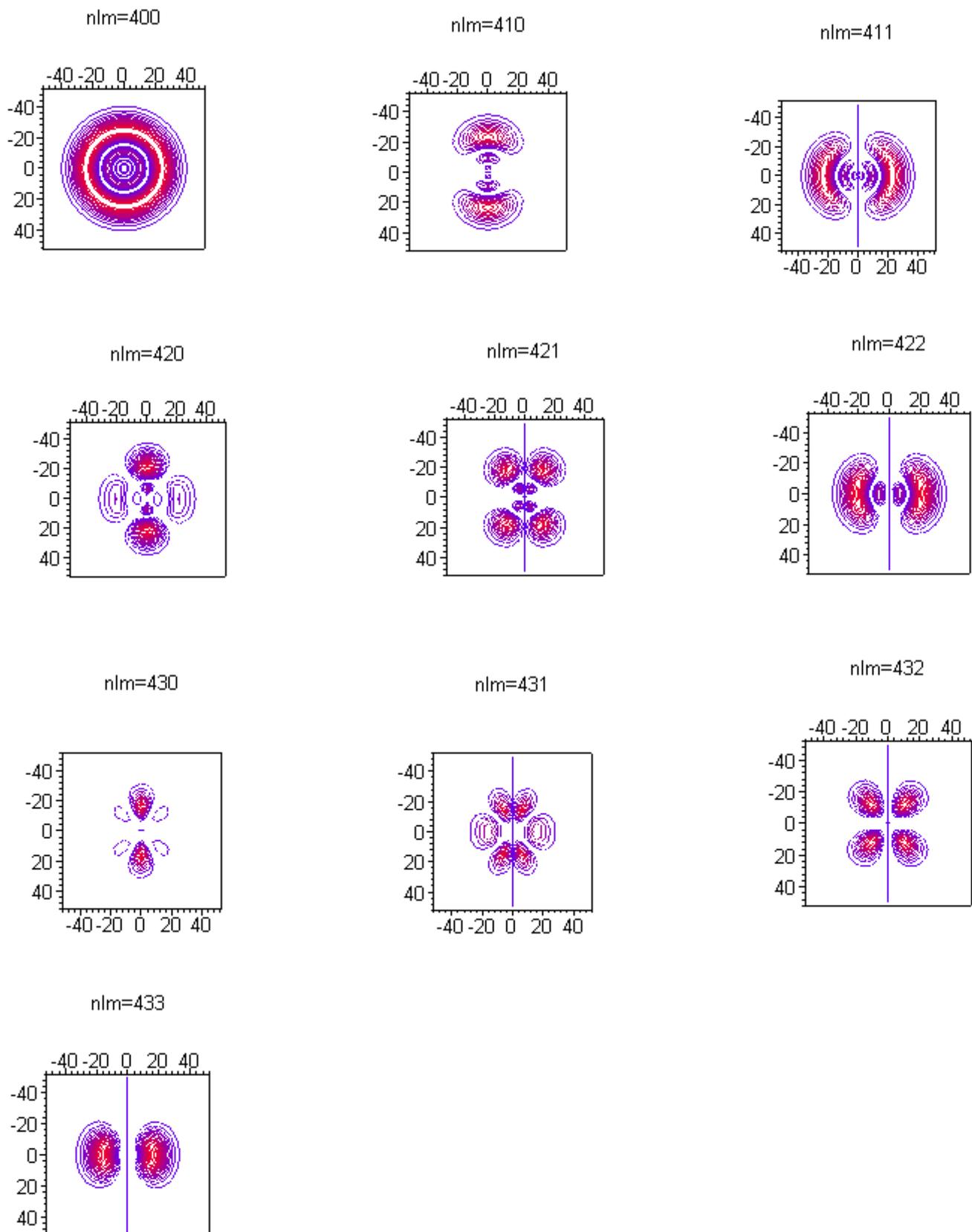


Obiger 3D-Plot kann im Worksheet mit der linken Maustaste so gedreht werden, daß man ihn von oben sieht. Mit Kontextmenüs kann man eine andere Farbgebung und einen anderen Darstellungsstil wählen (hier Konturlinien):

`nIm=320`



Oder man schreibt eine kleine Prozedur, die automatisch alle Verteilungen zur Hauptquantenzahl  $n = 4$  ausgibt:



Natürlich geht das auch mit anderen Quantenzahlen und im Worksheet lassen sich die 3D-Plots wieder interaktiv bearbeiten.

Auch die [statistische Interpretation](#) kann mit Maple leicht veranschaulicht werden - natürlich auch als Film.

Aus '[Moderne Physik mit Maple](#)'

[komma@oe.uni-tuebingen.de](mailto:komma@oe.uni-tuebingen.de)

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Die Plancksche Strahlungsformel

Die spektrale Energiedichte der Strahlung eines schwarzen Körpers als Funktion der Frequenz (oder Wellenlänge) mit der Temperatur des Körpers als Parameter.

Da es hier in erster Linie um den Verlauf der Kurven geht, wählen wir "passenden Einheiten" ( $c = k = 1$ ) und vernachlässigen Normierungsfaktoren. Dann lautet die Plancksche Strahlungsformel:

>planck:=h\*f^3/(exp(h\*f/T)-1);

$$planck := \frac{hf^3}{e^{\left(\frac{hf}{T}\right)} - 1}$$

Darin bedeutet  $f$  die Frequenz,  $T$  die Temperatur und  $h$  das Wirkungsquantum.

Wäre das Wirkungsquantum 0, so ergäbe sich die Strahlungsformel von Rayleigh und Jeans (die für kleine Frequenzen, bzw.  $hf \ll T$  eine brauchbare Näherung darstellt):

>rj:=limit(planck,h=0);

$$rj := f^2 T$$

Für große Frequenzen (genauer für  $hf \gg T$ ) erhält man die Wiensche Strahlungsformel:

>wien:=h\*f^3/(exp(h\*f/T));

$$wien := \frac{hf^3}{e^{\left(\frac{hf}{T}\right)}}$$

Man beachte: im Vergleich zur Planckschen Strahlungsformel fehlt im Nenner nur " - 1"

Wo liegt das Maximum?

>ps:=diff(planck,f);

$$ps := \frac{3hf^2}{e^{\left(\frac{hf}{T}\right)} - 1} - \frac{h^2 f^3 e^{\left(\frac{hf}{T}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{hf}{T}\right)} - 1\right)^2 T}$$

>simplify(ps);

$$-\frac{hf^2 \left( -3T e^{\left(\frac{hf}{T}\right)} + 3T + hf e^{\left(\frac{hf}{T}\right)} \right)}{\left( e^{\left(\frac{hf}{T}\right)} - 1 \right)^2 T}$$

>fmax:=solve(ps,f)[1];

$$f_{max} := \frac{T(\text{LambertW}(-3 e^{(-3)}) + 3)}{h}$$

Passt zum Wienschen Verschiebungsgesetz  $f_{max} \sim T$ .

Zahlenwerte:

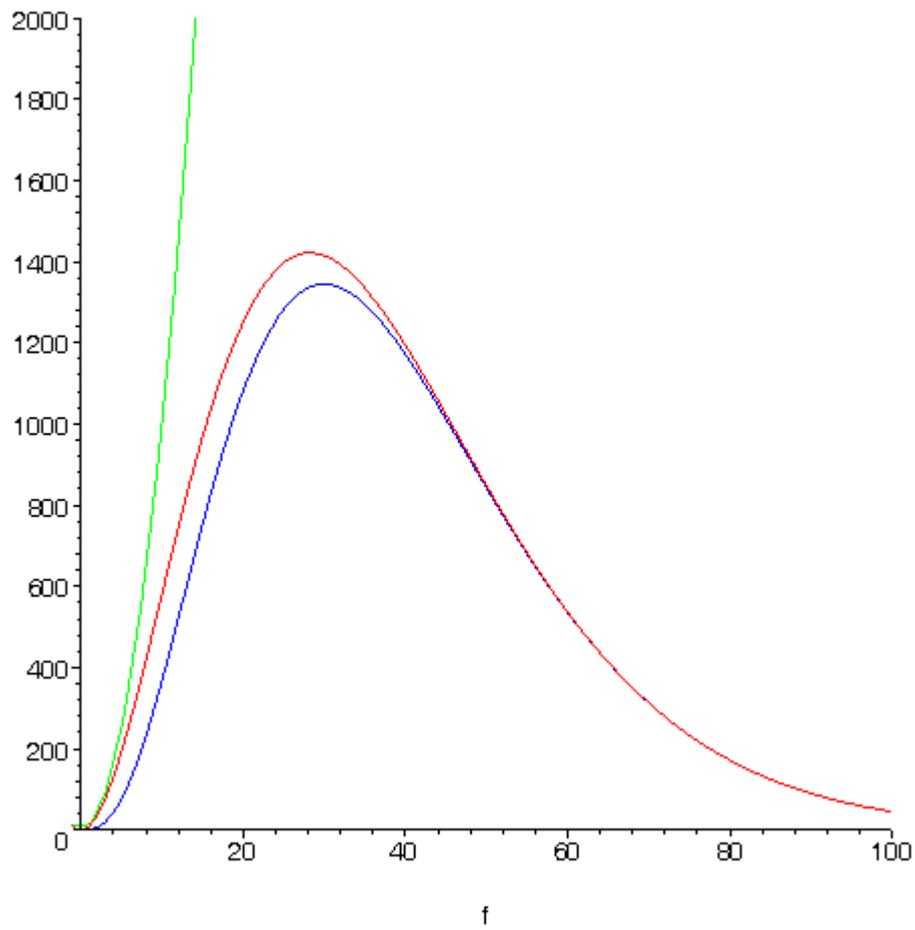
>h:=1:T:=10:

>evalf(fmax);

28.21439372

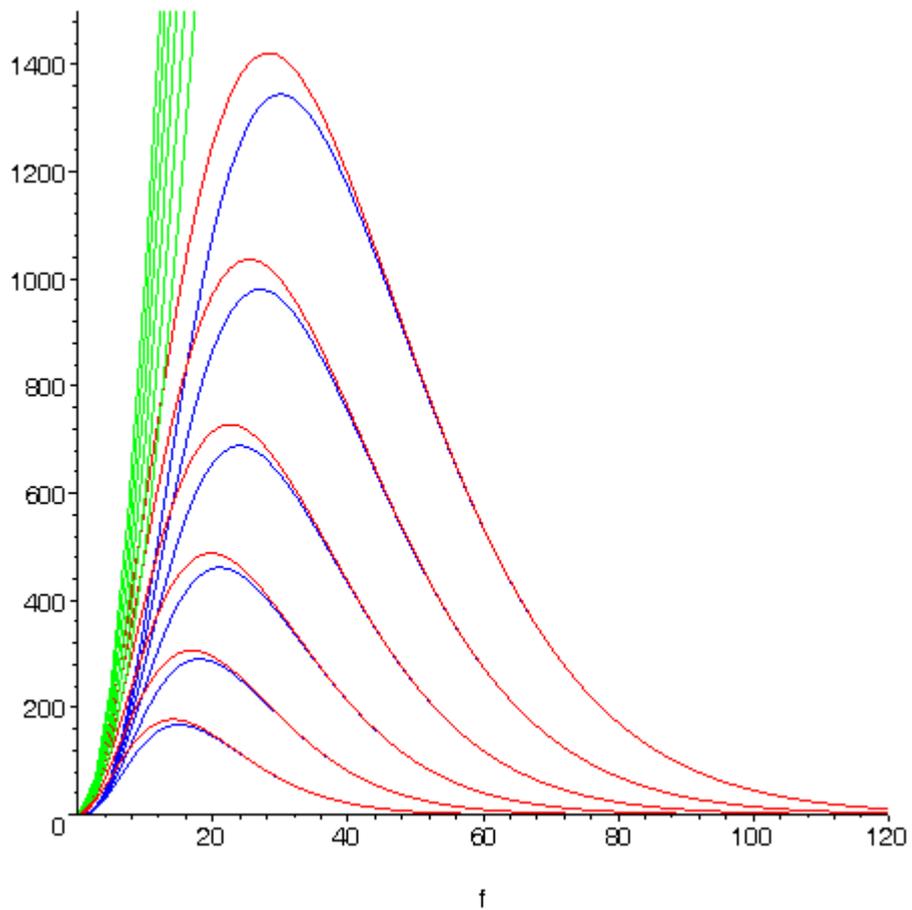
Und wie sehen die Kurven aus?

>plot([planck,rj,wien],f=-1..100,0..2000,color=[red,green,blue]);



Wir vergleichen die Strahlungsformeln für sechs Temperaturen:

```
>display(seq(plot([planck,rj,wien],f=0..120,0..1500,color=[red,green,blue]),T=5..10));
```

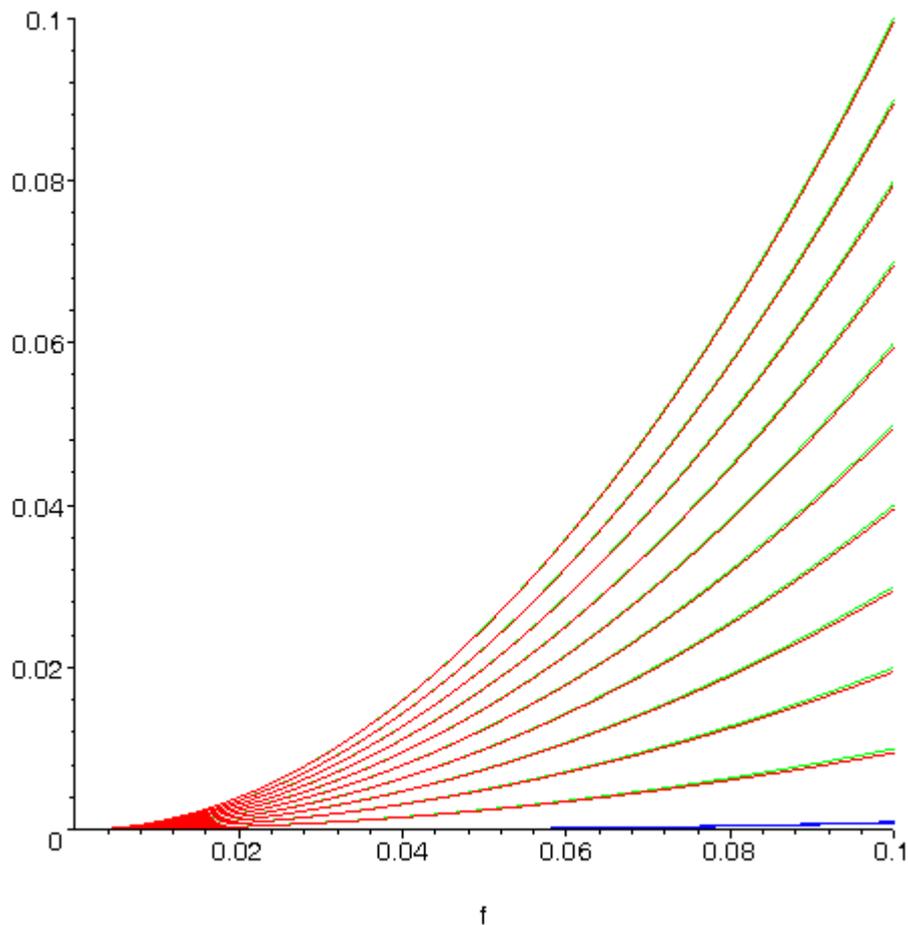


- Planck (rot)

- Rayleigh und Jeans (grün, RJ) kann nicht stimmen, weil die Kurven für große Frequenzen gegen Unendlich gehen: Ultraviolett katastrophe. Jeder noch so kalte Körper müsste Röntgenstrahlen emittieren. Die Annahme von RJ, dass die Wahrscheinlichkeit für die Abstrahlung auf alle Frequenzen gleich verteilt ist, muss also falsch sein.
- Wien (blau) sieht im Vergleich zu Planck recht gut aus, aber auch hier gibt es einen Haken:

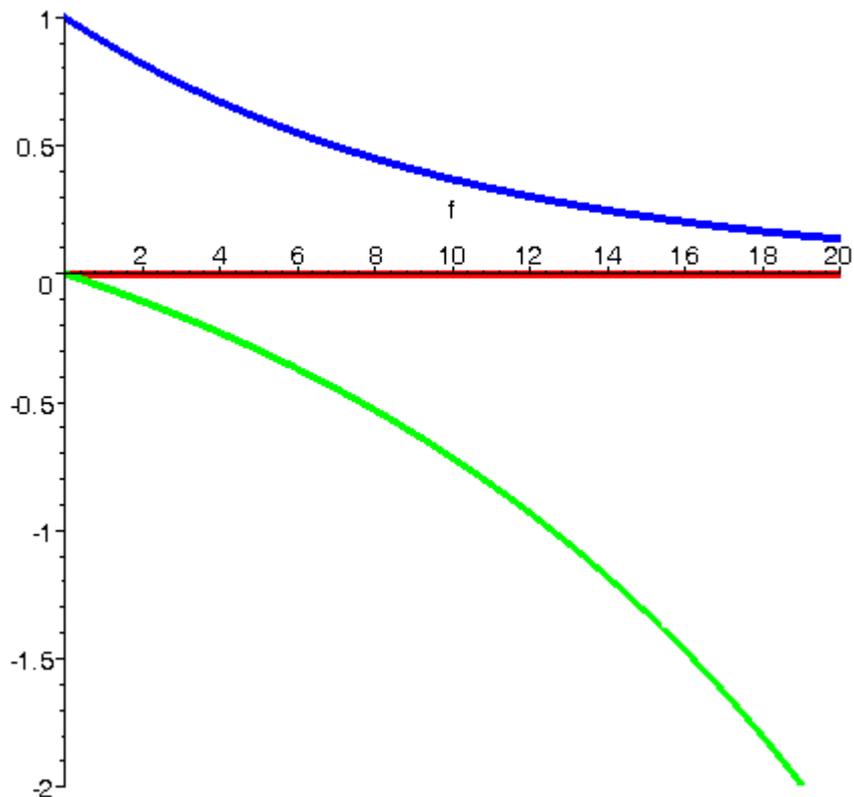
Für kleine Frequenzen nähert sich die Wiensche Verteilung (blau) einem Grenzwert, der auch bei beliebig hohen Temperaturen nicht überschritten wird, während RJ hier von Planck fast nicht zu unterscheiden ist.

```
>display(seq(plot([planck,rj,wien],f=0..0.1,0..0.1,color=[red,green,blue]),T=1..10));
```



Kleine Frequenzen sind aber mindestens so wichtig wie große (Radio, Fernsehen,...): Wäre Wien richtig, so würden Glühlampen keine Wärme abstrahlen (das wäre eine Infrarotkatastrophe - aber nicht für die Hersteller von Glühlampen :-)). Also ist die Wahrscheinlichkeit für die Abstrahlung auch keine Maxwellverteilung (was Wien annahm, um die experimentellen Daten zu fiten).

Die prozentualen Abweichungen (100% entspricht 1 auf der Ordinate) der "alten Strahlungsformeln" von der Planckschen Formel (rot) sehen so aus:



Planck hat also recht genial zwischen der Ultraviolett- und der Infrarotkatastrophe gemittelt...

Und wie kam nun Planck auf seine Verteilung?

Das ist eine längere Geschichte (und Rechnung), die Sie vielleicht demnächst hier lesen können.

Aber die Annahme und das Ergebnis sind bekannt: Die Energie elektromagnetischer Strahlung wird in Quanten emittiert und absorbiert. Und Einstein ergänzte: Elektromagnetische Strahlung ist auch quantisiert unterwegs: Photonen!

Das war der Beginn der Quantenphysik, zu dem auch das Bohrsche Atommodell gehört: Im Atom halten sich die Elektronen nur auf bestimmten Bahnen auf (ohne elektromagnetische Strahlung abzugeben). Der Übergang von einer Bahn zur anderen geschieht im Bohrschen Atommodell mit einem [Quantensprung](#), bei dem ein Photon (elektromagnetische Strahlung) emittiert oder absorbiert wird. Ein Jahrhundert später ist man in der Physik zu einem wesentlich besseren Verständnis der Vorgänge gekommen (-> Quantenelektrodynamik), was aber ewig Gestrige nicht daran hindert, mit Begriffen (oder auch nur Namen), die vor 100 Jahren entstanden, hausieren zu gehen.

Ja - so sieht es im Informationszeitalter aus: Der [Quantensprung](#) als Paradebeispiel für Mystifizierung. Wie im finstersten Mittelalter (Strahlung schwarzer Körper?)...

Etwas leichter verdaulichere Kost: Wir sehen uns die Strahlungsformeln noch einmal als Funktion der Wellenlänge an

>planck:=h/lambda^5/(exp(h/(lambda\*T))-1);

$$planck := \frac{h}{\lambda^5 \left( e^{\left( \frac{h}{\lambda T} \right)} - 1 \right)}$$

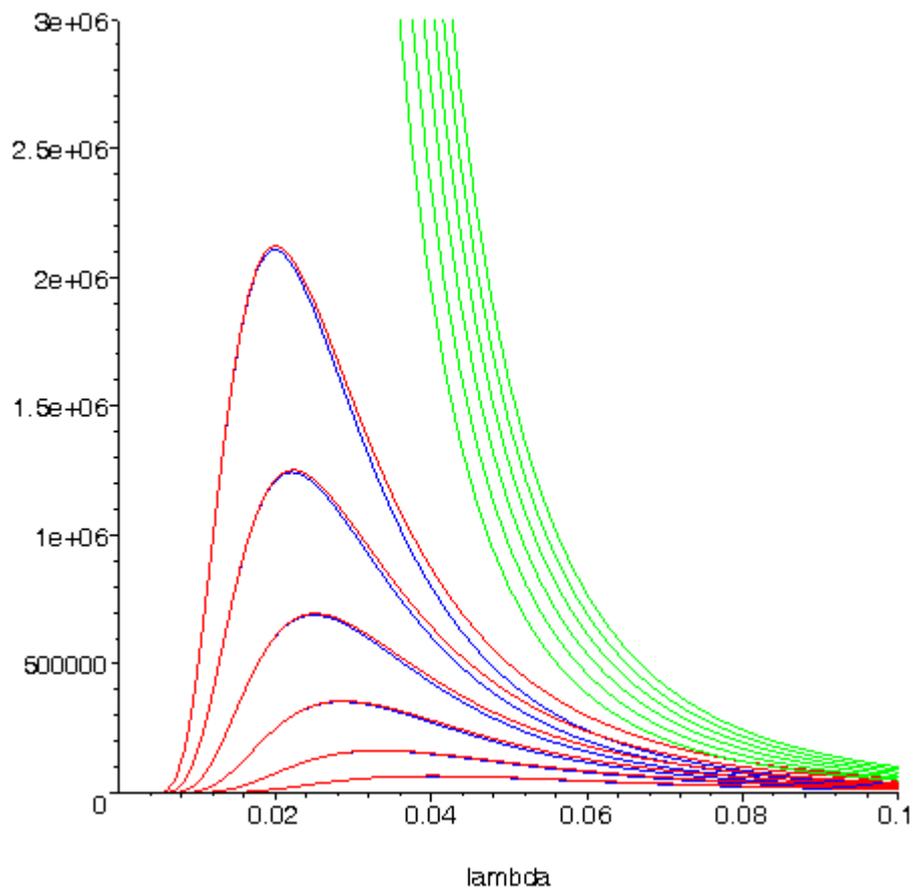
>rj:=limit(planck,h=0);

$$r_j := \frac{T}{\lambda^4}$$

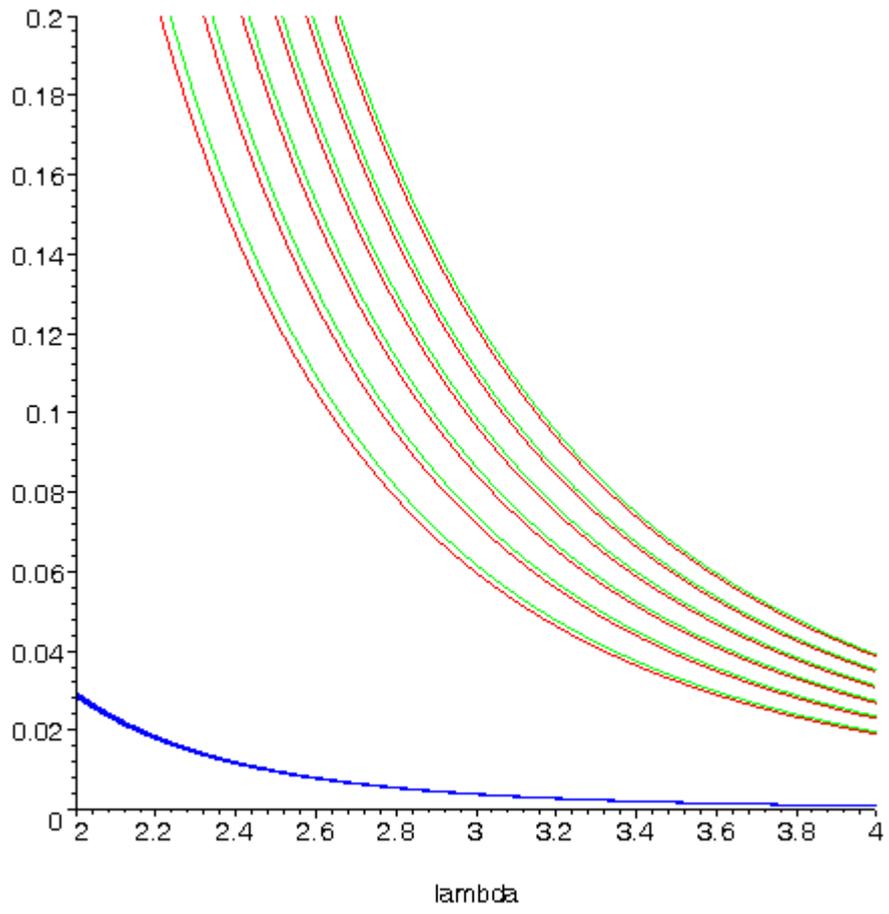
```
>wien:=h/lambda^5/(exp(h/(lambda*T)));
```

$$wien := \frac{h}{\lambda^5 e^{\left(\frac{h}{\lambda T}\right)}}$$

```
>display(seq(plot([planck,rj,wien],lambda=0..0.1,0..3e6,color=[red,green,blue]),T=5..10));
```



```
>display(seq(plot([planck,rj,wien],lambda=2..4,0..0.2,color=[red,green,blue]),T=5..10));
```



[komma\\_AT\\_oe.uni-tuebingen.de](http://komma_AT_oe.uni-tuebingen.de)

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Elektrofluid

Was ist ein Elektrofluid? Mit etwas Googlen findet man dazu alle möglichen Einträge, von Pumpen (electrofluid) bis Plasmen (electron fluid). Aber dieser Name passt auch zu einem einzigem gebundenen Elektron:

Der Übergang eines Wasserstoffelektrons von einem Zustand ( $n|l|$ ) in einen anderen ( $n'|l'|$ ), kann als Überlagerung der beiden Zustände mit zeitabhängigen Gewichten beschrieben werden. Das Elektron benimmt sich dabei wie ein Fluid und es gilt für zeitunabhängige Potentiale die Kontinuitätsgleichung. Man kann also nicht nur die Dichteschwankungen berechnen, sondern auch den Strom als Vektorfeld, Bahnen von (gedachten) Punkten des Elektrofluids und die Bewegung dieser virtuellen Punkte. Wenn die Attosekundenphysik weiterhin so rasant fortschreitet, wird es dazu auch bald Experimente geben!

Auf den unten verlinkten Seiten ist das schwingende Atom zweidimensional dargestellt (Schnittebene zum Azimut 0), wobei die Gewichte sinusförmig variieren und so eine laufende Emission und Absorption von Strahlung simuliert wird. Bei den dreidimensionalen Darstellungen von Strom, Bahnen und "Wolke" ist nur die hintere Hälfte des Atoms dargestellt (beginnend für  $t = 0$ ) und die Gewichte der überlagerten Zustände ändern sich nicht (festes Verhältnis 1:1).

Zur groben Orientierung: Ändert sich der Bahndrehimpuls  $l$  um 1, so entsteht Dipolstrahlung; eine Änderung von  $l$  um 2 bedeutet Quadrupolstrahlung;...

© Die folgenden Darstellungen wurden erstmalig 2009 vom Autor dieser Seiten berechnet.

Angepasste Fenstergröße:

© [100 <-> 210](#)      © [100 <-> 211](#)  
 © [100 <-> 310](#)      © [100 <-> 311](#)      © [100 <-> 320](#)      © [100 <-> 321](#)      © [100 <-> 322](#)  
 ...  
 © [400 <-> 511](#)      © [400 <-> 521](#)

volle Fenstergröße:

© [100 <-> 210](#)      © [100 <-> 211](#)  
 © [100 <-> 310](#)      © [100 <-> 311](#)      © [100 <-> 320](#)      © [100 <-> 321](#)      © [100 <-> 322](#)  
 ...  
 © [400 <-> 511](#)      © [400 <-> 521](#)

Ein paar Anmerkungen für Theoretiker und Techniker:

- Für die Animationen der Übergänge wurden gewichtete Wasserstoffeigenfunktionen (also die bekannten geschlossenen Lösungen) zu den jeweiligen Quantenzahlen überlagert (Nebenbedingung: Summe der Quadrate der Gewichte = 1). Mehr Information (z.B. die Rotation der Dichteverteilung) liefern [dreidimensionale Darstellungen](#), die in Maple auch interaktiv bearbeitet werden können.
- Strahlungscharakteristik: siehe [Multipolstrahlung](#).
- [Are there quantum jumps?](#)

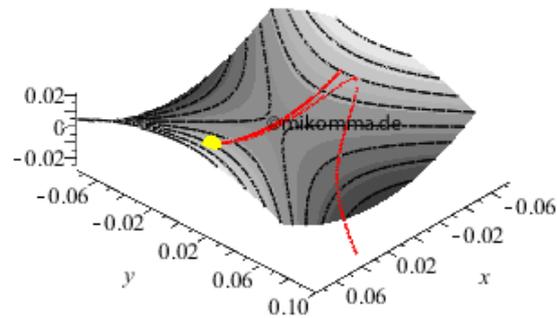
'[Moderne Physik mit Maple](#)'

Wie fängt man elektrisch geladene Teilchen ein?

Das ist nicht ganz einfach, insbesondere wenn man die Teilchen zur Ruhe bringen will!  
Deshalb gab es 1989 auch den [Nobel Prize in Physics](#) dafür.

Mit statischen Feldern ist das nicht möglich. In einem Quadrupolfeld mit dem Potential eines Sattels würde das Teilchen die "[Standard-Paul-Falle](#)" schon bei geringsten Abweichungen vom Grat schnell verlassen:

$$\| (0.) \| 4 \| (3.2) \| (0.05) \| (1.10^{-8}) \| 0 \| 0 \| 0$$

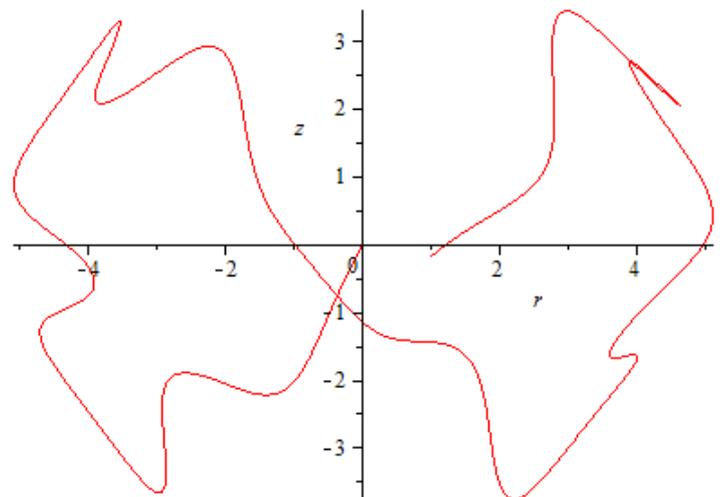
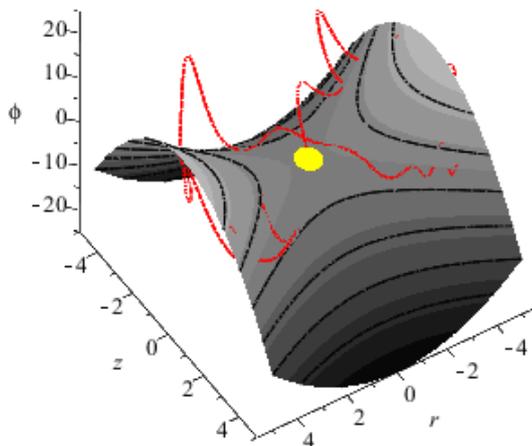


Man muss deshalb den Sattel laufend geeignet verformen, z.B. so:

Mit einer "schwingenden Membran" kann man das Teilchen unter Kontrolle halten.

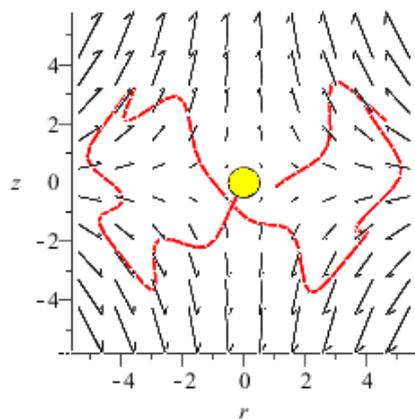
*hallo paul!*

Die reale Bahn des Teilchens verläuft dabei in der r-z-Ebene (Zylinderkoordinaten), wenn das Teilchen ohne azimuthale Geschwindigkeit startet.

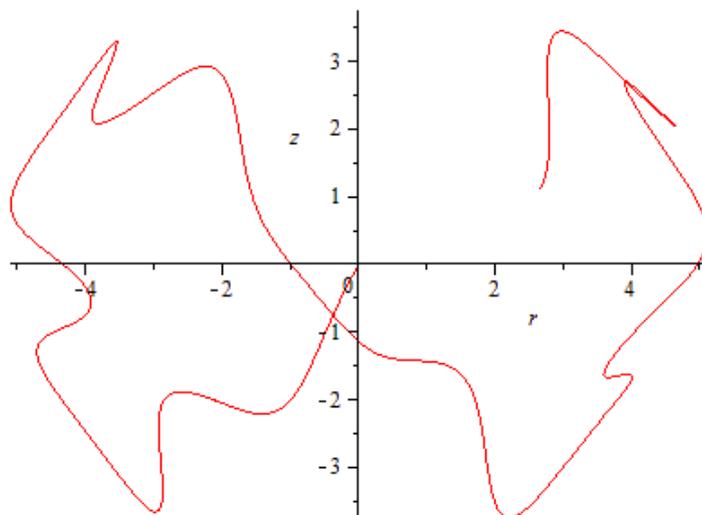


In obiger Darstellung wurde das Teilchen künstlich auf die schwingende Membran (das zeitlich veränderliche Potential) gesetzt.

Alternative Darstellung der Bahn mit Feldstärkevektoren  
(rotationssymmetrisch um die z-Achse zu denken).



Bleibt das Teilchen auch für längere Zeit in der Falle (Zeitraffer)?



[Sieht fast so aus!](#)

© M. Komma 12/2010

Methode: Lösung der Mathieschen Differentialgleichungen mit Maple.

Siehe auch: Paul-Falle, [Standard](#)

[Mechanisches Analogon](#) | Mechanisches Analogon, [Details](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Schrödinger

Besuch in Alpbach 2005. Wir danken Frau Braunizer!



Schrödinger hat mit dieser Gleichung unsere Welt dauerhaft verändert:

Und war ein Philosoph!



Denn das, was ist, ist nicht, weil wir es fühlen  
Und ist nicht nicht, weil wir es nicht mehr fühlen.  
Welles besteht, sind wir, und sind so dauernd.  
Se ist denn alles Sein ein einzig Sein.  
Und dann es weiter ist, wenn einer stirbt,  
Sagt Dir, daß er nicht aufgehört zu sein.

E.S.  
1942



Was Schrödinger schon vor mehr als 50 Jahren wusste und beim Aufstellen seiner Gleichung ahnte, wird nun (2005) dank moderner Experimentierkunst wieder mühsam ans Tageslicht gefördert:

- Es gibt keine [Quantensprünge!](#)
- [There are no Quantum Jumps!](#)
- [Es gibt keine Schrödingerkatze!](#)
- [There is no Schroedingers cat!](#)

'Moderne Physik mit Maple'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Rydbergatome

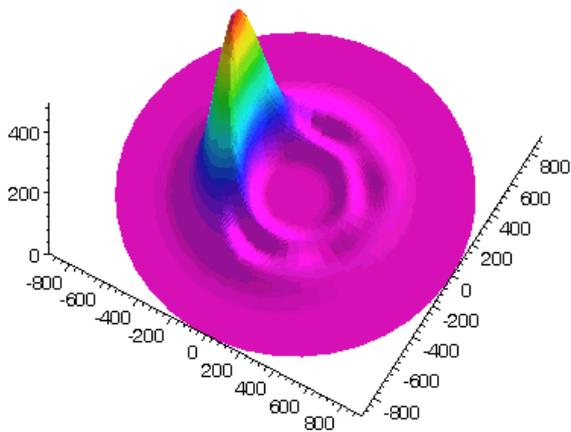
Unter Rydbergatomen versteht man allgemein hochangeregte Atome. Wegen ihrer Größe eignen sie sich besonders gut für den Vergleich der quantenmechanischen und der klassischen Beschreibung gebundener Elektronen.

Die folgenden Animationen zeigen jeweils das Betragsquadrat der Überlagerung der fünf Wasserstoffeigenfunktionen mit den Hauptquantenzahlen  $n = 17 \dots 21$  (in Experimenten werden die Atome meistens wesentlich höher angeregt, für die Darstellung im Web werden die Verteilungen aber zu komplex). Je nach Wahl der verbleibenden Quantenzahlen  $l$  (Bahndrehimpuls) und  $m$  (Orientierung) sowie der Gewichte der Zustände ergeben sich aus der Überlagerung "stationärer Zustände" unterschiedliche Bewegungen des Elektrons (seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeit):

Der Bahndrehimpuls nimmt von oben nach unten ab. In der linken Spalte werden die fünf Zustände mit gleichem Gewicht überlagert, in der rechten Spalte wird eine schmale Gaußverteilung (mit Zentrum bei  $n = 19$ ) verwendet.

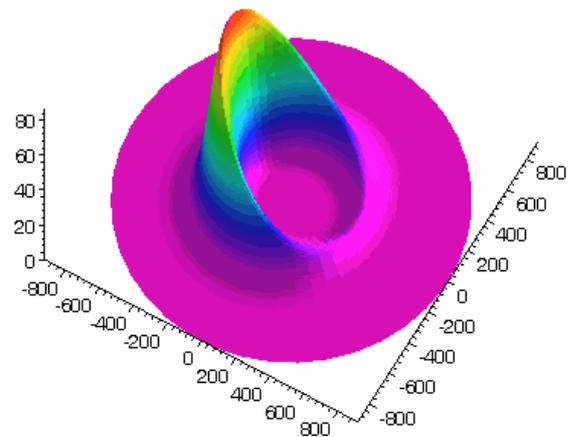
$n, l = 19, 18 \leftrightarrow 20, 19 \quad 100 \quad 0.$

$n, l = 19, 18 \leftrightarrow 20, 19 \quad 1 \quad 0.$



$l = m = n - 1, 40$  Bilder

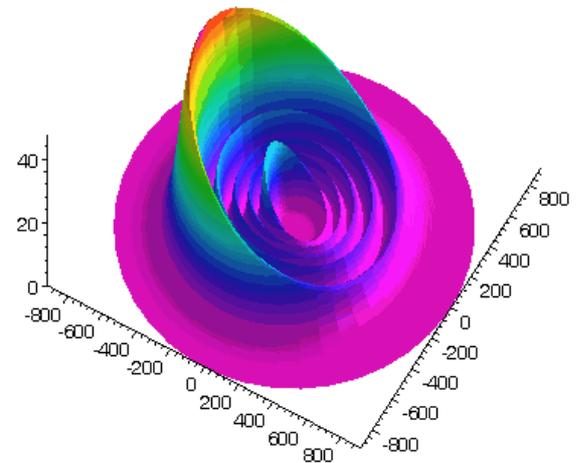
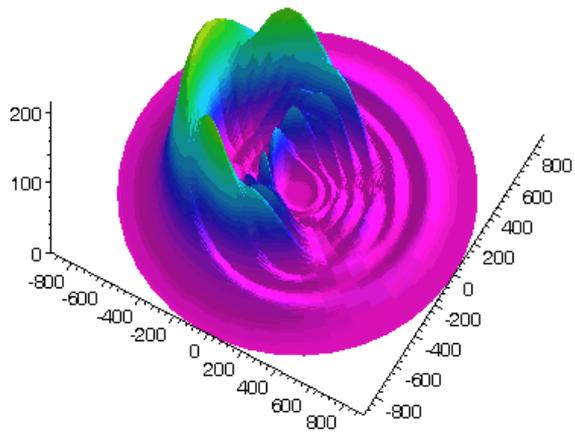
"Kreisförmiges Rydbergatom": Bahndrehimpuls- und magnetische Quantenzahl haben in jedem der fünf Zustände ihren maximalen Wert (der Drehimpulsvektor zeigt nach oben). Das Maximum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit rotiert in der "Äquatorebene des Atoms" auf der 19. Bohrschen Bahn (mit einer leichten Unwucht ;-)). Allerdings zerfließt das Maximum und lebt an mehreren Stellen wieder auf (fractional revival). Siehe auch: [Kreisförmige Rydbergatome](#)



Je weniger Gewicht die Beimischungen der benachbarten Zustände haben, desto weniger oft lebt das Elektron teilweise wieder auf...

$n, l = 19, 14 \leftrightarrow 20, 15 \quad 100. \quad 0.$

$n, l = 19, 14 \leftrightarrow 20, 15 \quad 1. \quad 0.$



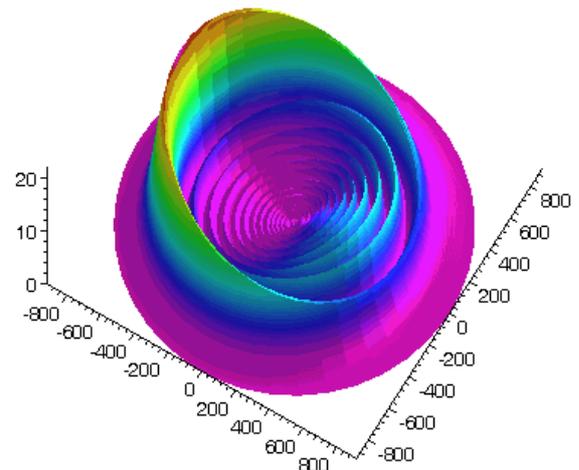
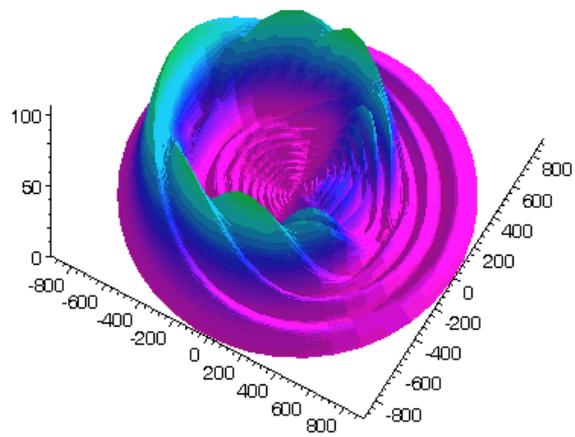
$l = m = n - 5$

Bei kleinerem Drehimpuls werden Perihel und Aphel sichtbar.

Je reiner der Zustand desto besser sieht man die Periheldrehung. Warum ist das Maximum im Perihel kleiner als im Aphel?

$n, l = 19, 4 \leftrightarrow 20, 5 \quad 100. \quad 0.$

$n, l = 19, 4 \leftrightarrow 20, 5 \quad 1. \quad 0.$

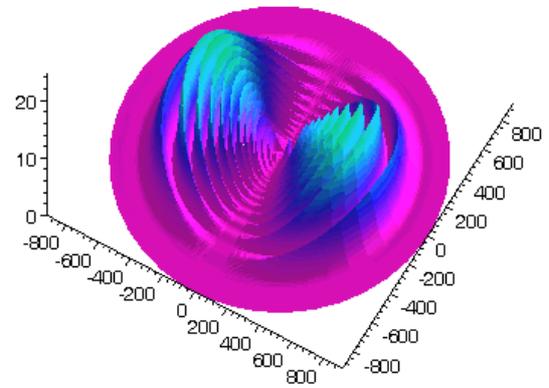
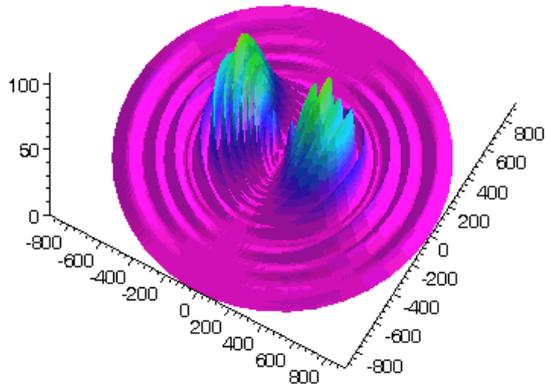


$l = m = n - 15$

Bei noch kleinerem Drehimpuls werden die Ellipsenbahnen immer exzentrischer...

Was sehen Sie, wenn Sie die Bilder auf Ihren Rechner kopieren und langsam laufen lassen?

Achtung - wir wechseln die Darstellung: die "Äquatorebene des Atoms steht jetzt senkrecht auf der Knotenlinie von links vorn nach rechts hinten.

$n, l = 19, 1 \leftrightarrow 20, 1 \quad 100. \quad 0.$ 
 $n, l = 19, 1 \leftrightarrow 20, 1 \quad 1. \quad 0.$ 

 $l = 1, m = 0, 80 \text{ Bilder}$ 

Überlagert man nur s-Zustände ( $l = 1$ ) mit der Orientierung  $m = 0$ , so schwingt das Elektron radial vom Perihel zum Aphel:

J.A.Yeazell and C.R.Stroud, Jr., Observation of fractional revivals in the evolution of a Rydberg atomic wave packet, Phys. Rev. A, 43, 9, 5153, 1991.

'Moderne Physik mit Maple'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Punktgitter

Das Standardgitter im Physikunterricht ist ein Strichgitter, das mit seinen parallelen Spalten parallele Interferenzstreifen erzeugt.

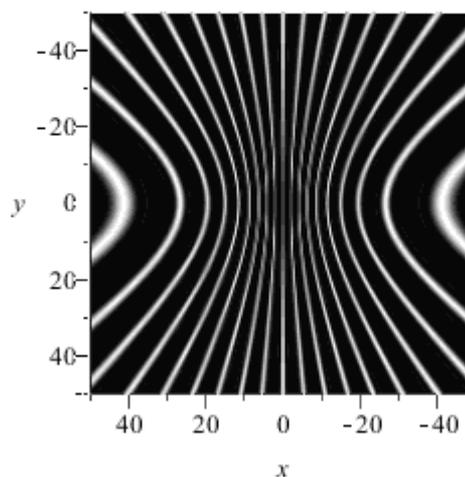
Wie sieht das Interferenzmuster aus, wenn man statt der Striche (Spalte) nur Punkte nimmt?

In den folgenden Bildern gehen von 5 Punkten, die äquidistant in x-Richtung angeordnet sind, gleichphasige Wellen aus (eine ebene Welle trifft senkrecht auf das "Gitter"). Schirmebene und "Gittergerade" sind parallel.

Was ist auf dem Schirm zu sehen? Hyperbeln!

Dieses Bild entsteht, wenn die Wellenlänge  $1/10$  des Punkteabstands beträgt und der Schirmabstand das 200-fache des Punkteabstands (Fernzone).

(Moiré-Effekte trotz hoher Auflösung nicht vermeidbar :-((

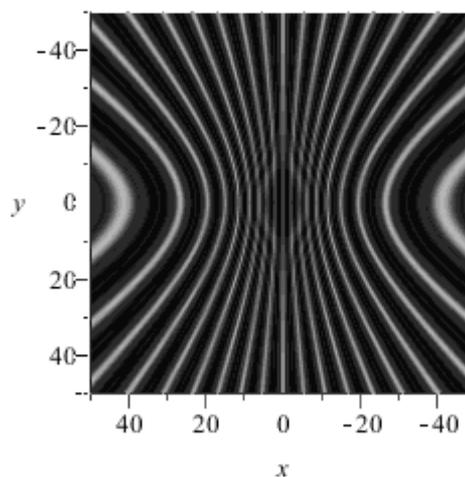


Was passiert, wenn man die Wellenlänge variiert?

Schirmabstand = 200 x Punkteabstand.

Wellenlänge =  $1/10 \dots 1/3$  x Punkteabstand.

Wie erwartet wird die Anzahl der Maxima mit zunehmender Wellenlänge kleiner.

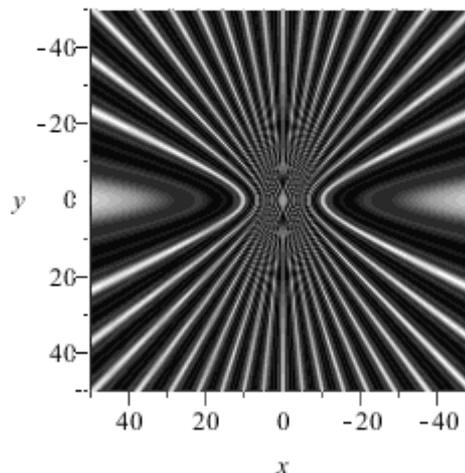


Was passiert, wenn man den Schirmabstand variiert?

Wellenlänge =  $1/10$  x Punkteabstand.

Schirmabstand =  $50..500$  x Punkteabstand.

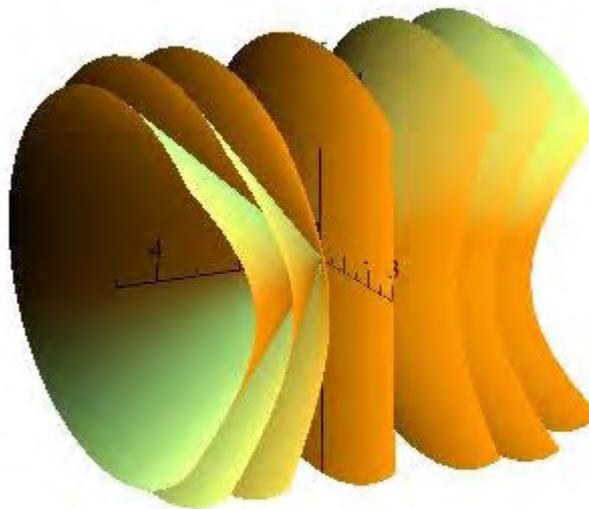
Natürlich sind weniger Hyperbeln zu sehen, wenn man einen Schirm konstanter Größe weiter weg schiebt :-))



Wie funktioniert das?

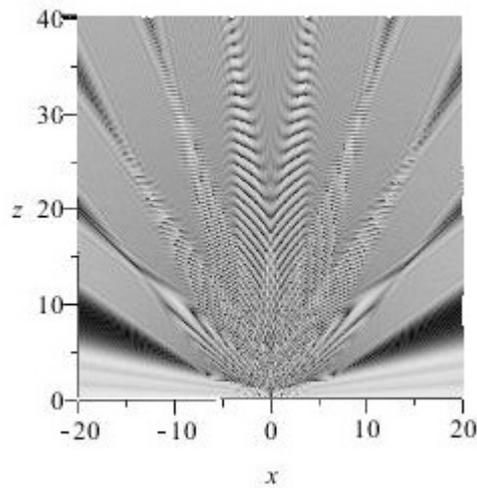
Die Interferenzmaxima des 1D-Punktgitters liegen in der Fernzone auf (den Mantelflächen von) Kegeln (genauer auf Rotationshyperboloiden). Der Schnitt dieser Flächen mit der Schirmebene (rechts vorne) ergibt bei den gewählten Parametern eine Schar gleichseitiger Hyperbeln.

y-Achse nach oben, x-Achse von rechts hinten nach links vorne, z-Achse von links hinten nach rechts vorn. Die Einfärbung dient nur der Illustration.

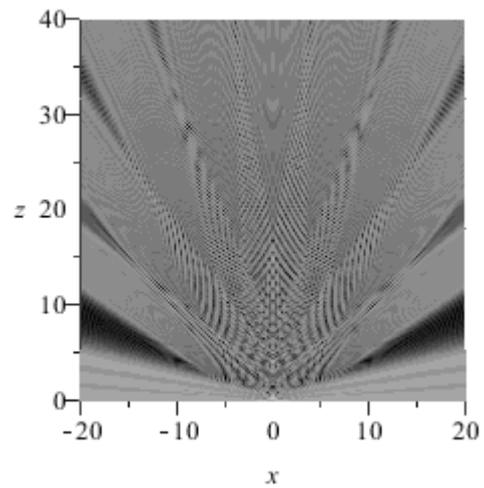


Es gibt aber noch einen anderen interessanten Aspekt. Wenn man sehen will wie sich die Interferenz "unterwegs" entwickelt, sollte man den Schirm nicht senkrecht zum einfallenden Licht aufstellen, sondern z.B. in die x-z-Ebene legen. (Noch besser wäre es natürlich, das Experiment in einem Dampfbad durchzuführen :-))

In den folgenden Bildern fällt paralleles Licht in z-Richtung auf 61 Streuzentren, die äquidistant auf der x-Achse liegen (von  $x=-3$  bis  $x=3$ ).



Hier beträgt die Wellenlänge  $1/5$  des Abstands der Streuzentren.



Und was passiert hier?  
Wir haben doch immer gelernt, dass Gittermaxima viel schärfer sind als Spaltmaxima!

Man beachte auch den Übergang von der Nahzone zur Fernzone. Da gibt es im Gegensatz zu "den Interferenzhyperbeln", die man mit Kreide skizziert, doch sehr interessante Details!

Anmerkung: Die Intensität ist logarithmisch und ohne Berücksichtigung ihrer Abnahme mit dem Abstand zu den Streuzentren dargestellt.

© M. Komma 09/2010

Links:

- [Kreuzgitter](#)
- [Raumgitter](#)
- [Theorie](#)
- [Form aus Kohärenz](#)
- Reflexion und Brechung mit [Laufenden ebenen Wellen und Wellenpaketen](#)
- [Fresnelsche Formeln](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Kreuzgitter

Das Standardgitter im Physikunterricht ist ein Strichgitter, das mit seinen parallelen Spalten parallele Interferenzstreifen erzeugt.

Wenn man zwei Strichgitter orthogonal auf einander legt, entsteht ein Kreuzgitter. Wie sieht nun das Interferenzmuster aus?

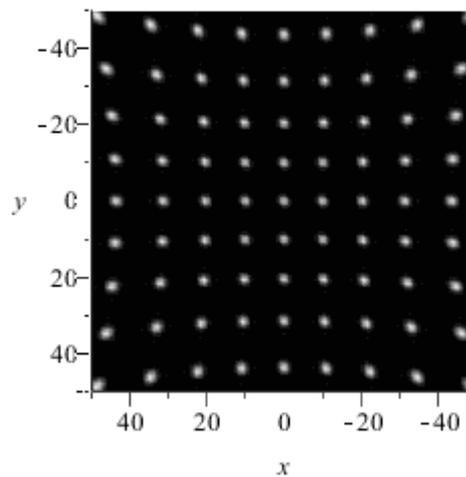
Schauen Sie einmal nachts durch Ihren Regenschirm auf eine Straßenlaterne!

Eine einfache Methode, die Interferenz am Kreuzgitter zu modellieren, ist das 2D-Punktgitter:

In den folgenden Bildern gehen von 5x5 Punkten, die äquidistant in einer Ebene angeordnet sind, gleichphasige Wellen aus (eine ebene Welle trifft senkrecht auf das Gitter). Schirmebene und Gitterebene sind parallel.

Was ist auf dem Schirm zu sehen? 49 Punkte? Warum nicht ganz äquidistant?

Dieses Bild entsteht, wenn die Wellenlänge  $1/10$  des Punkteabstands beträgt und der Schirmabstand das 1000-fache des Punkteabstands (Fernzone).

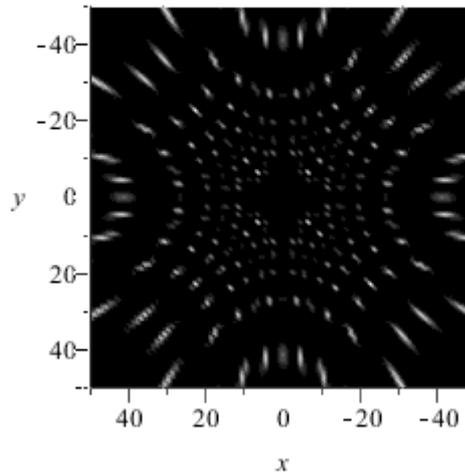


Was passiert, wenn man die Wellenlänge variiert?

Schirmabstand =  $200 \times$  Punkteabstand.

Wellenlänge =  $1/10 \dots 1/2 \times$  Punkteabstand.

Wie erwartet wird die Anzahl der Haupt- und Nebenmaxima mit zunehmender Wellenlänge schließlich doch kleiner (stroboskopische Effekte ;-)).

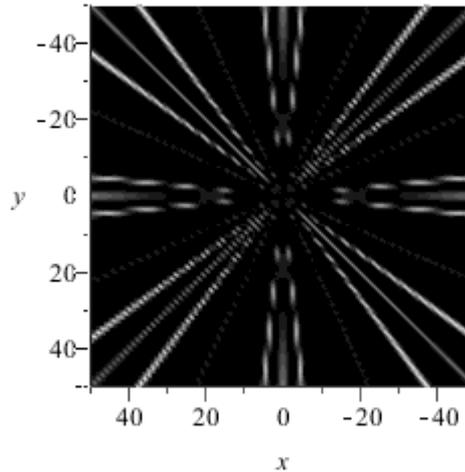


Was passiert, wenn man den Schirmabstand variiert?

Wellenlänge =  $1/10$  x Punkteabstand.

Schirmabstand =  $10..500$  x Punkteabstand.

Können Sie das mit einem eigenen Regenschirmexperiment bestätigen, oder ist der Arm nicht lang genug?

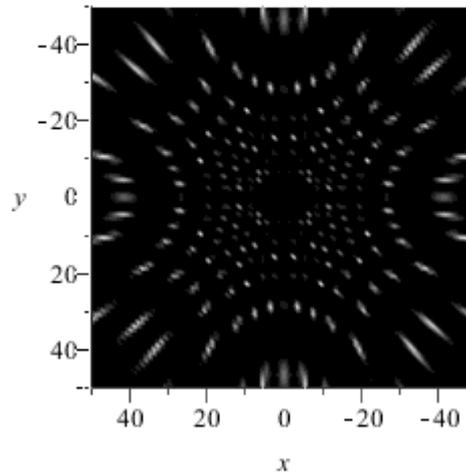


Was passiert, wenn man den Abstand der Beugungszentren (Punkte) variiert?

Wellenlänge =  $1/10$  x Punkteabstand.

Schirmabstand =  $200$  x Punkteabstand (in x-Richtung).

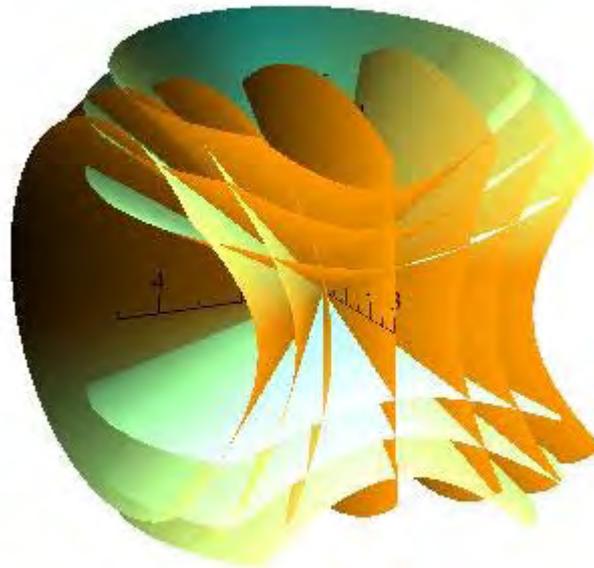
Variiert wird der Abstand der Zentren in  $y$ -Richtung vom ursprünglichen Wert (gleicher Abstand wie in  $x$ -Richtung) bis 0 (1D-Punktgitter).



Die Animation läuft vor und zurück, damit man etwas mehr Zeit hat, die Interferenzhyperbeln (auf dem Schirm) im Umkehrpunkt zu erkennen.

Wie funktioniert das?

Die Interferenzmaxima des Kreuzgitters liegen in der Fernzone auf (den Mantelflächen von) Kegeln (genauer auf Rotationshyperboloiden). Der Schnitt dieser Flächen mit der Schirmebene (rechts vorne) ergibt bei den gewählten Parametern zwei Scharen gleichseitiger Hyperbeln. Hauptmaxima entstehen aber nur dort, wo sich Kegel um die  $y$ -Achse mit Kegeln um die  $x$ -Achse schneiden.



$y$ -Achse nach oben,  $x$ -Achse von rechts hinten nach links vorne,  $z$ -Achse von links hinten nach rechts vorn. Die Einfärbung dient nur der Illustration.

© M. Komma 09/2010

Links:

- [Punktgitter](#)
- [Raumgitter](#)
- [Theorie](#)

- [Form aus Kohärenz](#)
- Reflexion und Brechung mit [Laufenden ebenen Wellen und Wellenpaketen](#)
- [Fresnelsche Formeln](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Raumgitter

### Braggreflexion in neuem Licht...

Das Standardgitter im Physikunterricht ist ein Strichgitter, das mit seinen parallelen Spalten parallele Interferenzstreifen erzeugt.

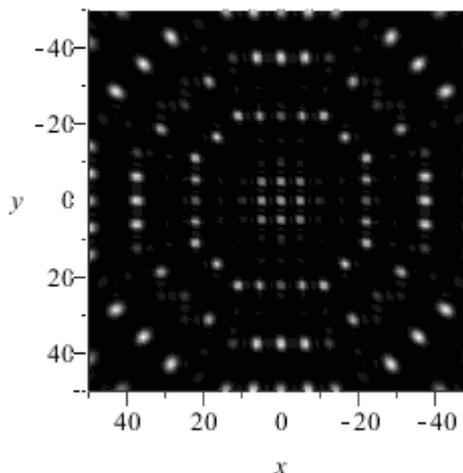
Wenn man zwei Strichgitter orthogonal auf einander legt, entsteht ein [Kreuzgitter](#). Wenn man mehrere solcher Kreuzgitter in gleichem Abstand und gleicher Orientierung stapelt, entsteht ein (kubisches) Raumgitter.

Wie sieht nun das Interferenzmuster aus? Schauen Sie einmal nachts durch eine passende Nanostruktur auf eine Straßenlaterne!

Eine einfache Methode, die Interferenz am Raumgitter zu modellieren, ist das 3D-Punktgitter:

In den folgenden Bildern gehen von  $3 \times 3 \times 3$  Punkten, die äquidistant in einem Würfel angeordnet sind, gleichphasige Wellen aus (eine ebene Welle trifft senkrecht auf das Gitter). Schirmebene und Hauptnetzebenen sind parallel.

Was ist auf dem Schirm zu sehen? Viele Punkte? Warum nicht alle äquidistant?



Dieses Bild entsteht, wenn die Wellenlänge  $1/10$  des Punkteabstands beträgt und der Schirmabstand das 1000-fache des Punkteabstands (Fernzone).

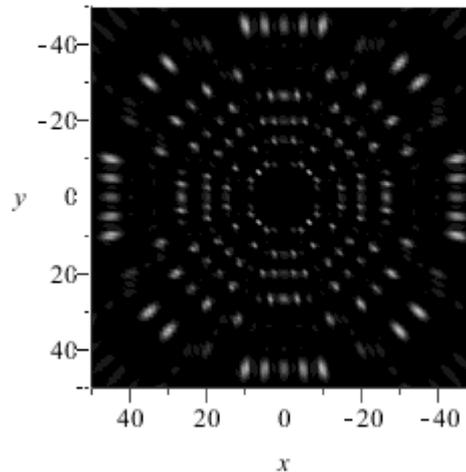
Was passiert, wenn man die Wellenlänge variiert?

Schirmabstand =  $200 \times$  Punkteabstand.

Wellenlänge =  $1/10 \cdot 1/2 \times$  Punkteabstand.

Wie erwartet wird die Anzahl der Haupt- und Nebenmaxima mit

zunehmender  
Wellenlänge schließlich  
doch kleiner (nicht nur  
stroboskopische Effekte  
;-)).

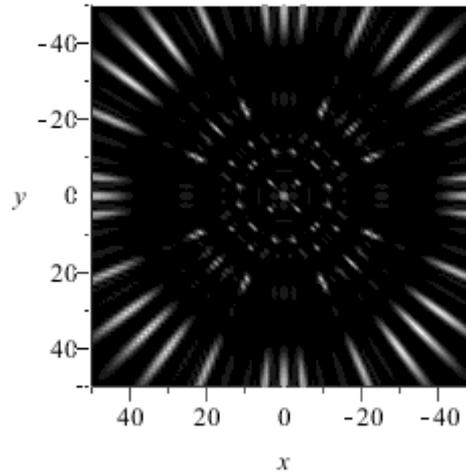


Was passiert, wenn man  
den Schirmabstand  
variiert?

Wellenlänge =  $1/10 \times$   
Punkteabstand.

Schirmabstand =  $10..500 \times$   
Punkteabstand.

Können Sie das mit  
einem eigenen  
Nanoexperiment  
bestätigen, oder ist der  
Arm nicht lang genug?



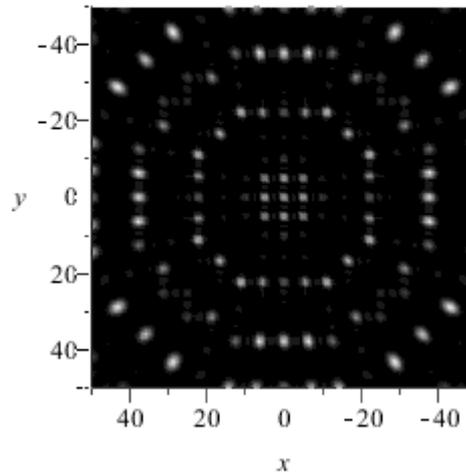
Was passiert, wenn man  
den Abstand der  
Netzebenen in  
Beleuchtungsrichtung (z)  
variiert?

Wellenlänge =  $1/10 \times$   
Punkteabstand.

Schirmabstand =  $200 \times$

Punkteabstand (in x- und y-Richtung).

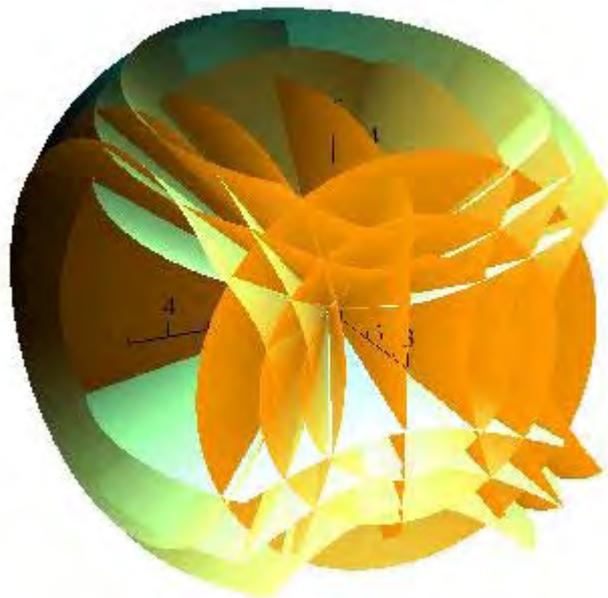
Variiert wird der Abstand der Netzebenen in z-Richtung vom ursprünglichen Wert (gleicher Abstand wie in x-Richtung) bis 0 (2D-Punktgitter = Kreuzgitter).



Wie funktioniert das?

Die Interferenzmaxima des Raumgitters liegen in der Fernzone auf (den Mantelflächen von) Kegeln (genauer auf Rotationshyperboloiden). Der Schnitt dieser Flächen mit der Schirmebene (rechts vorne) ergibt bei den gewählten Parametern zwei Scharen gleichseitiger Hyperbeln und eine Schar von Kreisen. Hauptmaxima entstehen aber nur dort, wo sich Kegel um die y-Achse mit Kegeln um die x-Achse und Kegeln um die z-Achse schneiden.

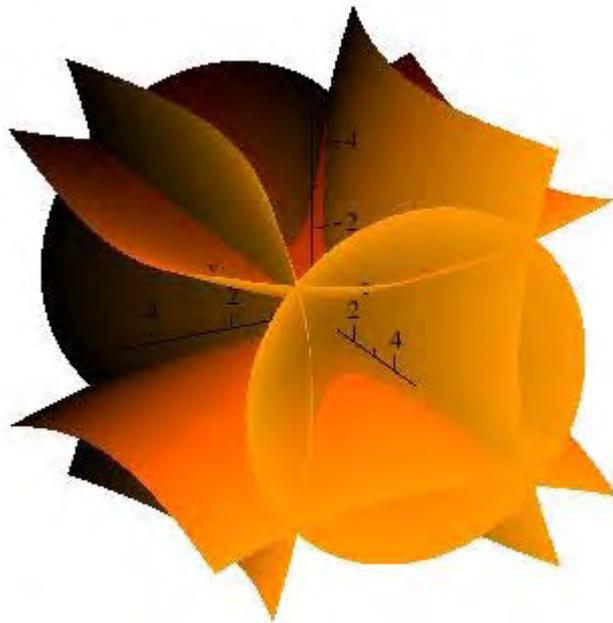
Dies ist aber nicht für alle Wellenlängen möglich: Das Raumgitter selektiert Wellenlängen (-> Bragg"reflexion"). Das Verhältnis Wellenlänge : Gitterkonstante wurde hier so gewählt, dass in einigen Richtungen konstruktive Interferenz eintritt. Viel Spaß beim Suchen!



y-Achse nach oben, x-Achse von rechts hinten nach links vorne, z-Achse von links hinten nach rechts vorn. Die Einfärbung dient nur der Illustration.

Wer es ganz genau nimmt, kann auch Rotationshyperboloide verwenden...

y-Achse nach oben, x-Achse von rechts hinten nach links vorne, z-Achse von links hinten nach rechts vorn. Die Einfärbung dient nur der Illustration.



© M. Komma 09/2010

Links:

- [Punktgitter](#)
- [Kreuzgitter](#)
- [Theorie](#)
- [Form aus Kohärenz](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

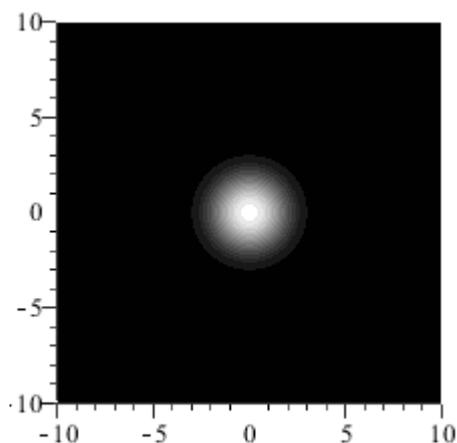
[Top](#)

## Lochblenden

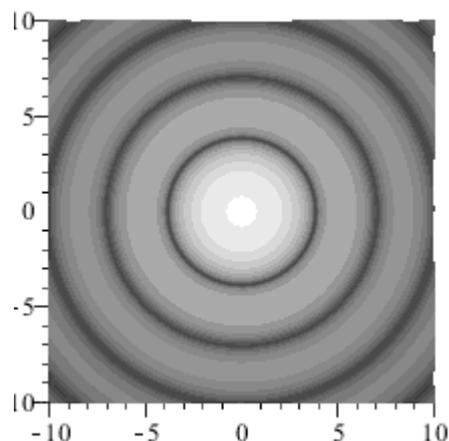
Das Standardbeugungsobjekt im Physikunterricht ist ein [Spalt](#), der parallele Interferenzstreifen erzeugt.

Wenn man statt des Spaltes eine Öffnung nimmt, die viel häufiger vorkommt - nämlich eine (kreisförmige) Lochblende - können die Interferenzstreifen nicht parallel sein.

Wie sieht nun das Beugungsmuster aus? Schauen Sie einmal nachts durch ein Fernrohr auf einen (Doppel-) Stern!



Eine Lochblende, aber auch die kreisförmige Öffnung eines Fernrohrs, erzeugt ein "Beugungsscheibchen". Wenn die Intensität linear dargestellt wird, erscheint nur das zentrale Maximum (das ist der nicht besonders interessante Normalfall).

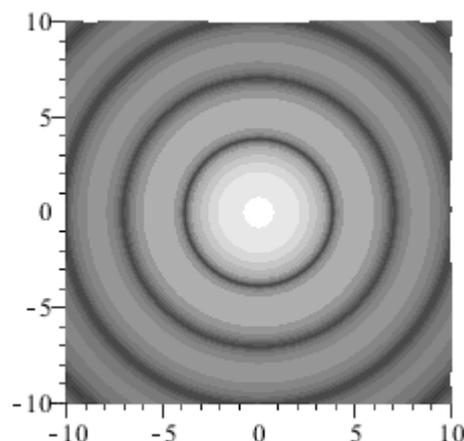


Hier (und im Folgenden) ist die Intensität logarithmisch dargestellt. Nun sind Beugungsringe zu sehen. Diese Ringe können aber auch in der Realität beobachtet werden, z.B. bei der Belichtung eines Films oder in einem Interferometer.

Was passiert, wenn man die Wellenlänge variiert?

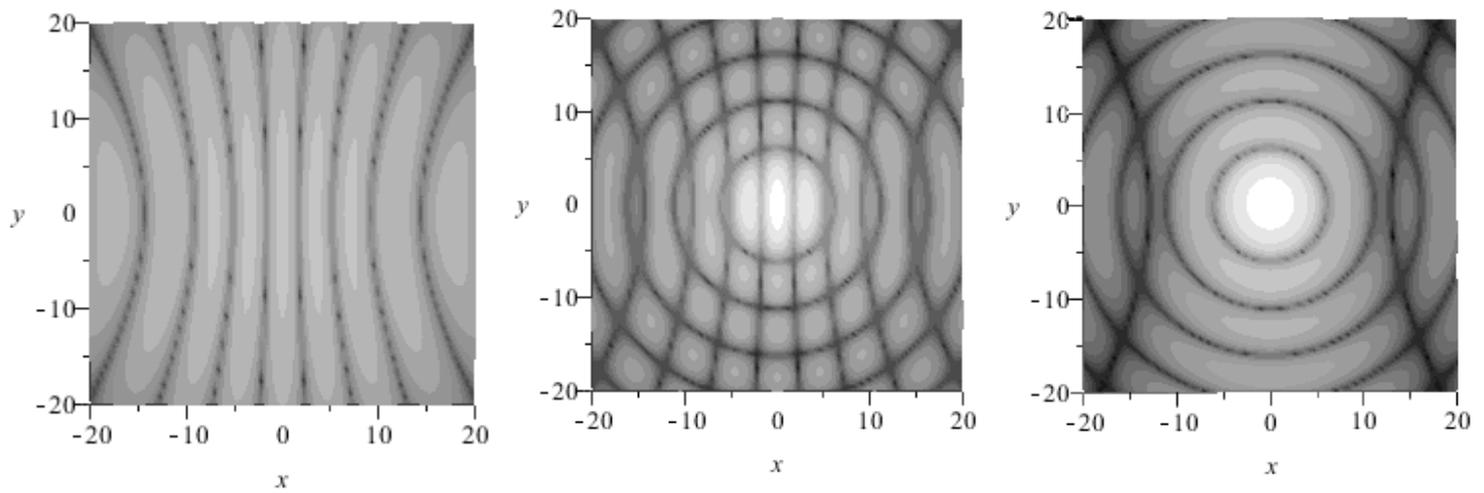
Je größer die Wellenlänge (im Vergleich zum Durchmesser der Lochblende), desto größer das Beugungsscheibchen und der Abstand der Beugungsringe.

Übergang von der Strahlenoptik zur Wellenoptik!



Ein weiteres Standardbeugungsobjekt ist der [Doppelspalt](#). Wie sieht die Beugung an zwei Lochblenden aus?

Das hängt von der Wellenlänge, dem Durchmesser der Blenden und ihrem Abstand ab. Welcher dieser drei Parameter wird in den folgenden Animationen verändert (und in welche Richtung)?



## Anmerkungen:

- Beugung: Abweichen der Strahlen vom geometrischen Strahlengang (Wellenoptik statt Strahlenoptik).
- Interferenz: Zusammenwirken mehrerer Wellen (oder Strahlen :- ) durch Superposition der Amplituden.
- Huygenssches Prinzip: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Zentrum einer Elementarwelle betrachtet werden.
- Methode: Eine endliche Öffnung hat unendlich viele Punkte, es interferieren also unendlich viele Elementarwellen. Zur Berechnung der resultierenden Amplitude (und Intensität) muss also integriert (statt summiert) werden. Leider entstehen dabei Integrale (-> Kirchhoff), die sich "nicht ganz einfach" auswerten lassen, bzw. viel Rechenzeit kosten. Obige Darstellungen wurden für die Fernzone (-> "Fraunhoferbeugung") berechnet (-> Besselfunktionen).

© M. Komma 10/2010

## Links:

- [Rechteckblende](#)
- [Kante](#)
- [Dreieckblende](#)
- [Punktgitter](#)
- [Kreuzgitter](#)
- [Raumgitter](#)
- [Theorie](#)
- [Form aus Kohärenz](#)

'Moderne Physik mit Maple'

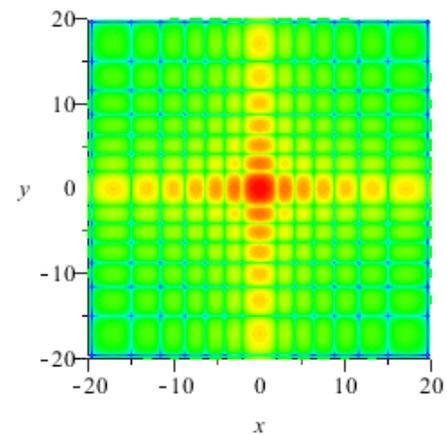
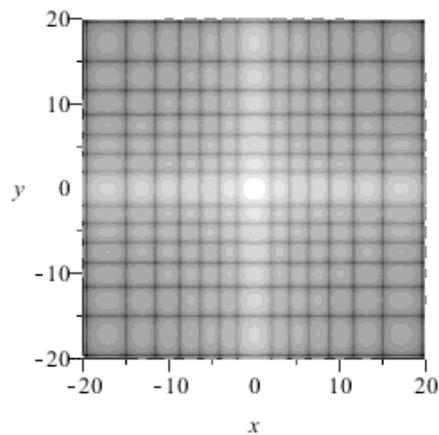
[HOME](#)[Physik](#)[Elektrizität](#)[Optik](#)[Atomphysik](#)[Quantenphysik](#)[Top](#)

## Rechteckblende

Das Standardbeugungsobjekt im Physikunterricht ist ein [Spalt](#), der parallele Interferenzstreifen erzeugt (wenn er voll ausgeleuchtet wird). Dabei versteht man unter einem Spalt in der Optik meistens ein Rechteck, das in eine Richtung "unendlich lang" ist.

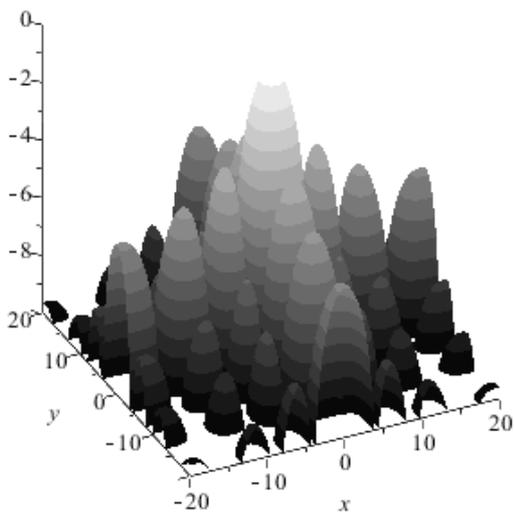
Wenn man statt des Optik-Standard-Spaltes eine Öffnung nimmt, die in beide Richtungen endliche Abmessungen hat, sollte sich an der Beugungsfigur etwas ändern.

Wie sieht nun das Beugungsmuster aus? Schauen Sie einmal nachts durch eine rechteckige Öffnung passender Abmessung auf eine Straßenlaterne!

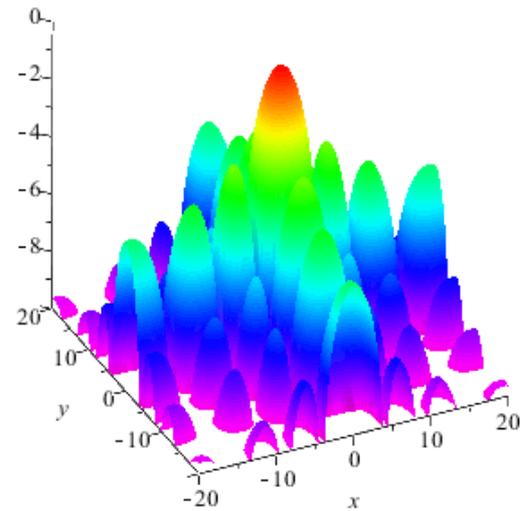


Mit einer quadratischen Blende bekommt man ein "quadratisches Muster" (nicht ganz quadratisch, weil sich für große Winkel die Abweichung des Sinus von seinem Argument bemerkbar macht). Wer hätte das gedacht? Das Problem ist nur: Weshalb sieht man diese Muster nicht jeden Tag? Das liegt daran, dass das zentrale Maximum um Größenordnungen intensiver ist als der Rest des Beugungsmusters. Deshalb wurde in obiger Darstellung ein logarithmischer Maßstab gewählt.

Die logarithmische Darstellung in Graustufen ist etwas irreführend. Also versuchen wir es mit einer Einfärbung (die nichts mit den Farben des Lichts zu tun hat). Schon etwas besser - oder?



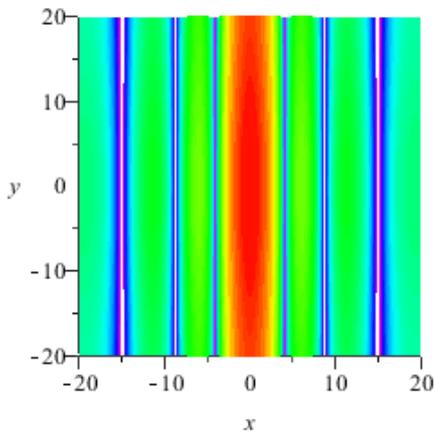
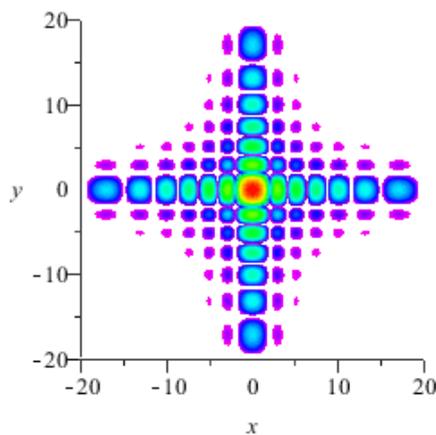
So sieht eine logarithmische 3D-Darstellung der Intensitätsverteilung aus, die nach unten abgeschnitten ist.



Mit künstlicher Einfärbung ist das eigentlich schöner!  
Wir merken uns also die Farbskala: Weiß = "nichts zu sehen" und dann immer dem Regenbogen entlang!

Doch nun zum Thema :-))

Wenn man eine rechteckige Blende mit weißem Licht beleuchtet, sind mindestens drei Parameter frei: Wellenlänge, Länge und Breite des Rechtecks. Welche Parameter werden in den folgenden Animationen verändert?



Noch eine Preisfrage: Wie müsste man die Farbskala einrichten, damit in etwa das Beugungsmuster bei der Beleuchtung einer Blende mit weißem Licht wiedergegeben wird?

Anmerkungen:

- Beugung: Abweichen der Strahlen vom geometrischen Strahlengang (Wellenoptik statt Strahlenoptik).
- Interferenz: Zusammenwirken mehrerer Wellen (oder Strahlen :-)) durch Superposition der Amplituden.
- Huygenssches Prinzip: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Zentrum einer Elementarwelle betrachtet werden.
- Methode: Eine endliche Öffnung hat unendlich viele Punkte, es interferieren also unendlich viele Elementarwellen. Zur Berechnung der resultierenden Amplitude (und Intensität) muss also integriert (statt summiert) werden. Leider entstehen dabei Integrale (-> Kirchhoff), die sich "nicht ganz einfach" auswerten lassen, bzw. viel Rechenzeit kosten. Obige Darstellungen wurden für die Fernzone (-> "Fraunhoferbeugung") berechnet.

Links:

- [Lochblende](#)
- [Dreieckblende](#)
- [Kante](#)
- [Punktgitter](#)
- [Kreuzgitter](#)
- [Raumgitter](#)
- [Theorie](#)
- [Form aus Kohärenz](#)

['Moderne Physik mit Maple'](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

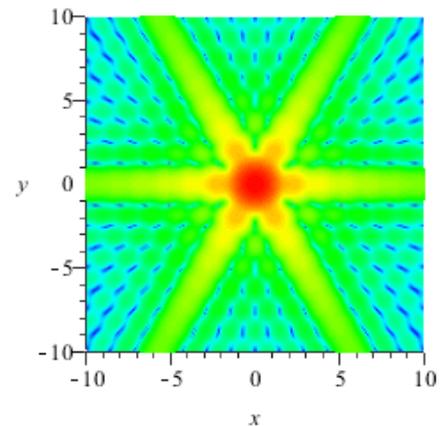
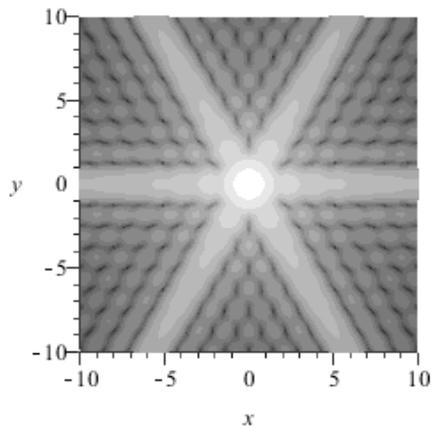
[Top](#)

## Dreieckblende

Das Standardbeugungsobjekt im Physikunterricht ist ein [Spalt](#), der mit seinen parallelen Kanten parallele Interferenzstreifen erzeugt (wenn er voll ausgeleuchtet wird).

Wenn man statt des Optik-Standard-Spaltes ein Dreieck nimmt, sollte sich an der Beugungsfigur etwas ändern.

Wie sieht nun das Beugungsmuster aus? Schauen Sie einmal nachts durch eine Kamera mit passender Blende auf eine Straßenlaterne!

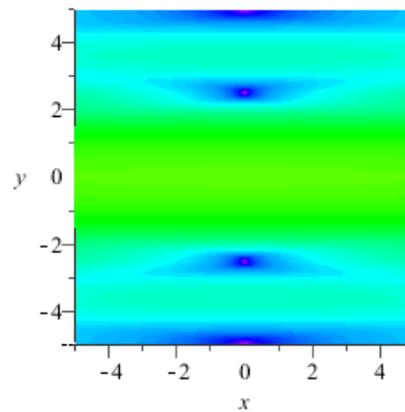
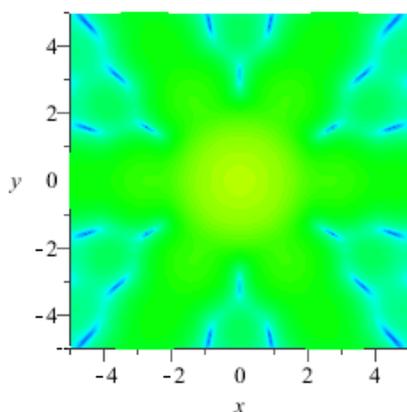


Ein gleichseitiges Dreieck erzeugt diese Beugungsfigur. Weshalb?

Intensität in logarithmischem Maßstab, Fraunhoferbeugung.

Mit künstlicher Einfärbung ist das eigentlich schöner!  
Wir merken uns also die Farbskala: "immer dem Regenbogen entlang".

In den folgenden Animationen wird das Dreieck verändert. Wie?

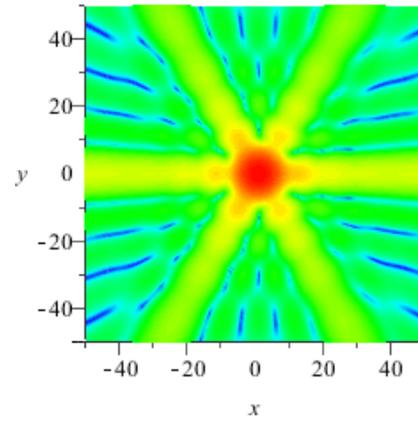
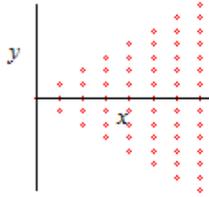


Anmerkungen:

- Beugung: Abweichen der Strahlen vom geometrischen Strahlengang (Wellenoptik statt Strahlenoptik).
- Interferenz: Zusammenwirken mehrerer Wellen (oder Strahlen :-)) durch Superposition der Amplituden.
- Huygenssches Prinzip: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Zentrum einer Elementarwelle betrachtet werden.
- Methode: Eine endliche Öffnung hat unendlich viele Punkte, es interferieren also unendlich viele Elementarwellen. Zur Berechnung der resultierenden Amplitude (und Intensität) muss also integriert (statt summiert) werden. Leider entstehen dabei Integrale (-> Kirchhoff), die

sich "nicht ganz einfach" auswerten lassen, bzw. viel Rechenzeit kosten. Obige Darstellungen wurden für die Fernzone (-> "Fraunhoferbeugung") berechnet.

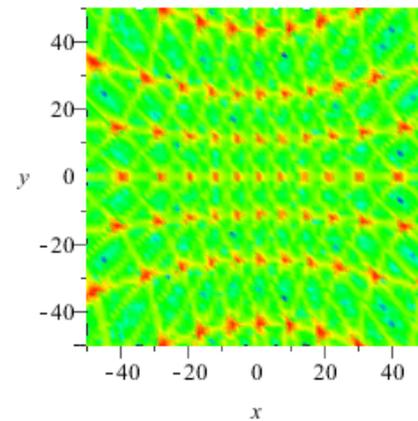
Noch eine andere Methode:



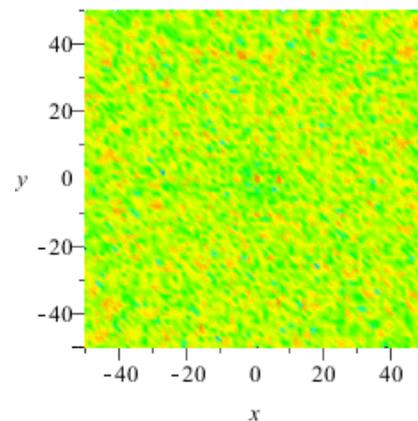
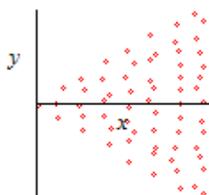
Man kann die Blende (mit unendlich vielen Elementarzentren) durch eine passende Anordnung endlich vieler (z.B. 64) Elementarzentren ersetzen.

Dann die Amplituden der Elementarwellen addieren (Vielstrahlinterferenz) und quadrieren. Sieht doch ganz vernünftig aus?

Aber was passiert hier?



Und hier?



Keine Sorge! Ihr Rechner ist nicht langsam. Die Animationen

werden nur langsamer abgespielt, damit Sie alles in Ruhe  
beobachten können...

© M. Komma 10/2010

Links:

- [Rechteckblende](#)
- [Kante](#)
- [Lochblende](#)
- [Punktgitter](#)
- [Kreuzgitter](#)
- [Raumgitter](#)
- [Theorie](#)
- [Form aus Kohärenz](#)

'Moderne Physik mit Maple'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

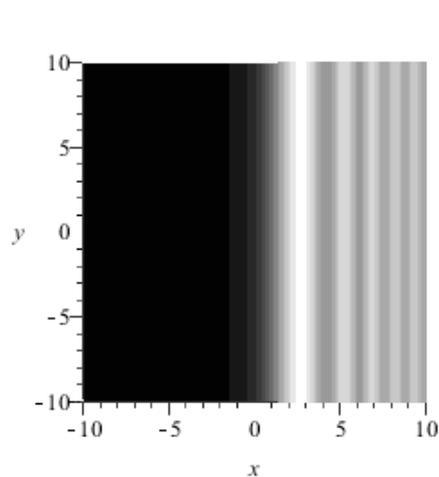
[Top](#)

## Beugung an einer Kante

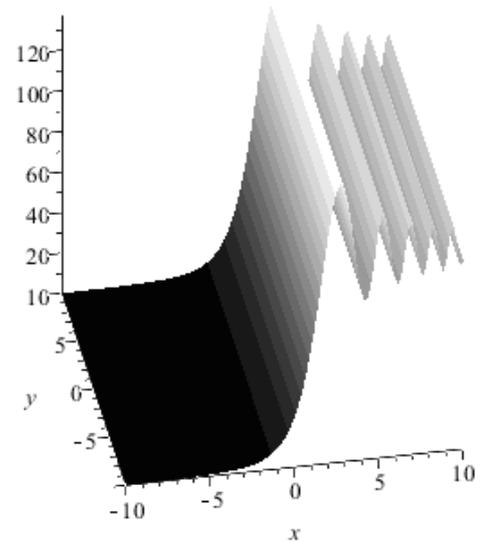
Das Standardbeugungsobjekt im Physikunterricht ist ein [Spalt](#), der parallele Interferenzstreifen erzeugt (wenn er voll ausgeleuchtet wird). Dabei versteht man unter einem Spalt in der Optik meistens ein Rechteck, das in eine Richtung "unendlich lang" ist.

Was passiert, wenn man nur eine Seite des "unendlich langen" Spalts nimmt? Dann wird das Licht (oder allgemeiner die Welle) an einer Kante gebeugt.

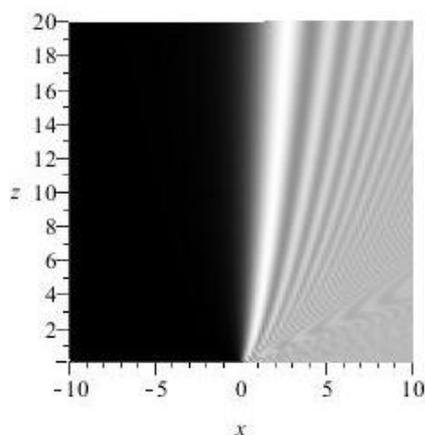
Wie sieht nun das Beugungsmuster aus? Hören Sie einmal hinter einem Hochhaus auf den Lärm des Straßenverkehrs :-)



Die Kante liegt bei  $x = 0$ . Die Intensitätsverteilung (auf einem Schirm in der  $x$ - $y$ -Ebene bei  $z = 20$ ) wurde in Fresnel-Näherung berechnet und ist in linearem Maßstab dargestellt.



So kommen die Graustufen zustande (Intensität nach oben). Beim Export des Maple-Plots nach GIF entstehen leider Streifen...



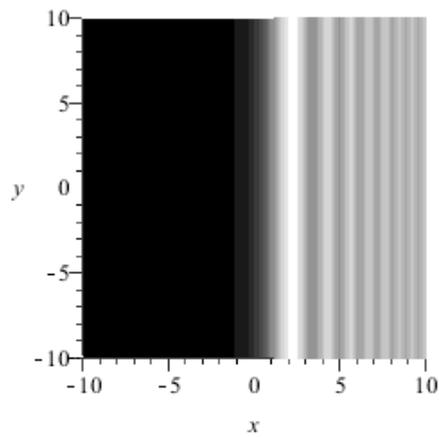
Intensitätsverteilung in der  $x$ - $z$ -Ebene, also in Richtung der einfallenden ebenen Welle.

Das Bild links erinnert stark an die Anströmung einer Kante im Windkanal. Ob Licht wohl doch aus Teilchen besteht?

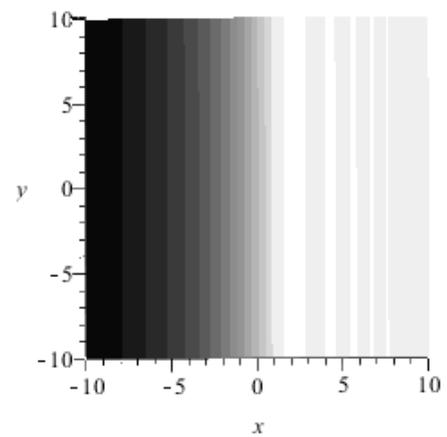
Nun ja - die "Wirbel" rechts unten sind nur Moiré-Effekte und Teilchen können auch nicht interferieren.

Aber es ist schon erstaunlich wie eine Welle reagiert, wenn man "eine Hälfte abschneidet"...

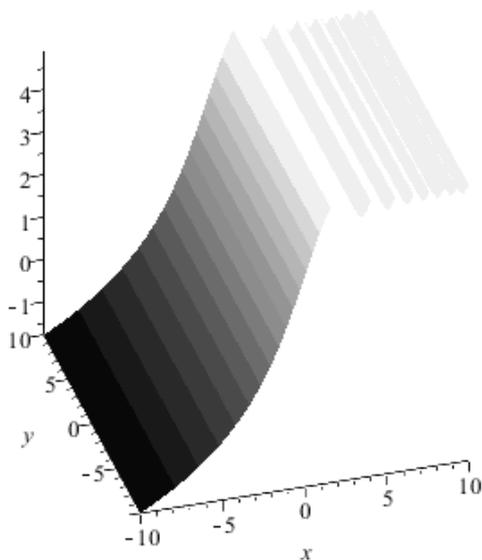
Das Licht gelangt also auch in den (geometrischen) Schattenraum und in der beleuchteten Halbebene entstehen Interferenzstreifen. Die Geometrie einer Kante lässt sich nicht ändern. Was wird also in den folgenden Animationen geändert?



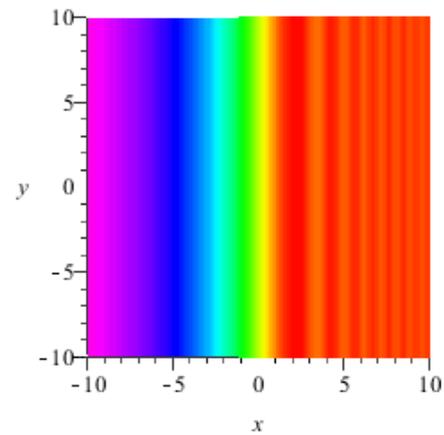
Lineare Darstellung der Intensitätsverteilung.



Logarithmische Darstellung der Intensitätsverteilung.



Logarithmisch-3D



Logarithmisch mit falscher Farbe

## Anmerkungen:

- Beugung: Abweichen der Strahlen vom geometrischen Strahlengang (Wellenoptik statt Strahlenoptik).
- Interferenz: Zusammenwirken mehrerer Wellen (oder Strahlen :- ) durch Superposition der Amplituden.
- Huygenssches Prinzip: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Zentrum einer Elementarwelle betrachtet werden.
- Methode: Eine endliche Öffnung hat unendlich viele Punkte, es interferieren also unendlich viele Elementarwellen. Zur Berechnung der resultierenden Amplitude (und Intensität) muss also integriert (statt summiert) werden. Leider entstehen dabei Integrale (-> Kirchhoff), die sich "nicht ganz einfach" auswerten lassen, bzw. viel Rechenzeit kosten. Obige Darstellungen wurden in Fresnel-Näherung berechnet.

© M. Komma 10/2010

## Links:

- [Rechteckblende](#)
- [Lochblende](#)
- [Dreieckblende](#)
- [Punktgitter](#)
- [Kreuzgitter](#)
- [Raumgitter](#)

- [Theorie](#)
- [Form aus Kohärenz](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

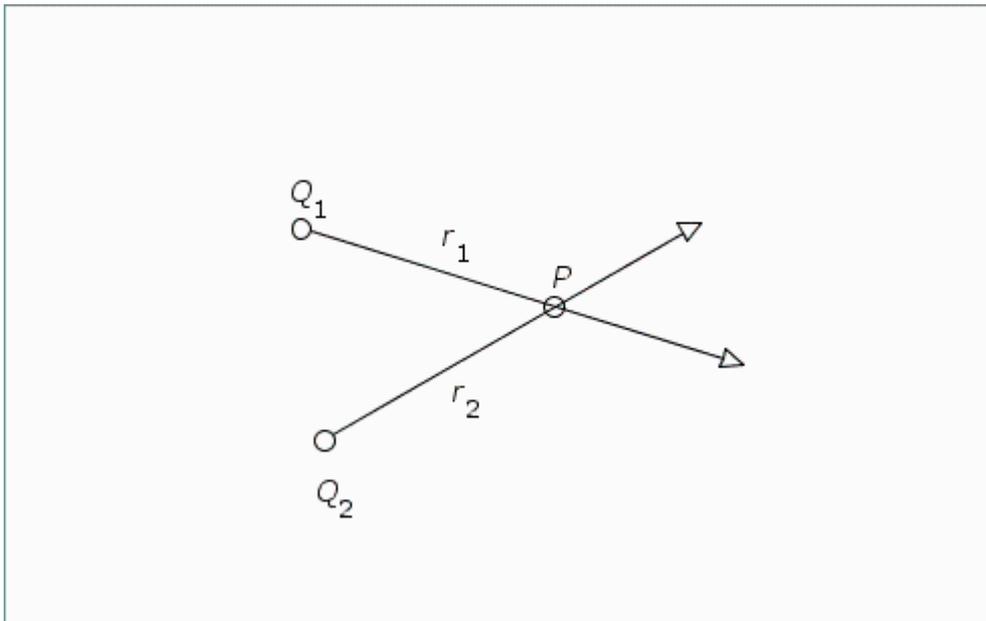
[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Interferenz und Beugung

Leider ist der Export von Maple-Standard nach HTML nicht optimal.  
[PDF sieht besser aus.](#)

Die Interferenz zweier Wellen lässt sich so beschreiben:



Von zwei Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$  gehen zwei Wellen aus, die sich nach Durchlaufen der Strecken  $r_1$  und  $r_2$  im Punkt  $P$  treffen. Will man die Intensität im Interferenzpunkt  $P$  (auf einem Schirm oder Detektor) wissen, so muss man das Betragsquadrat der resultierenden Amplitude berechnen:

$$\text{Intensität} = \left| A_1 e^{i k r_1 + \phi_1} + A_2 e^{i k r_2 + \phi_2} \right|^2 \quad (1)$$

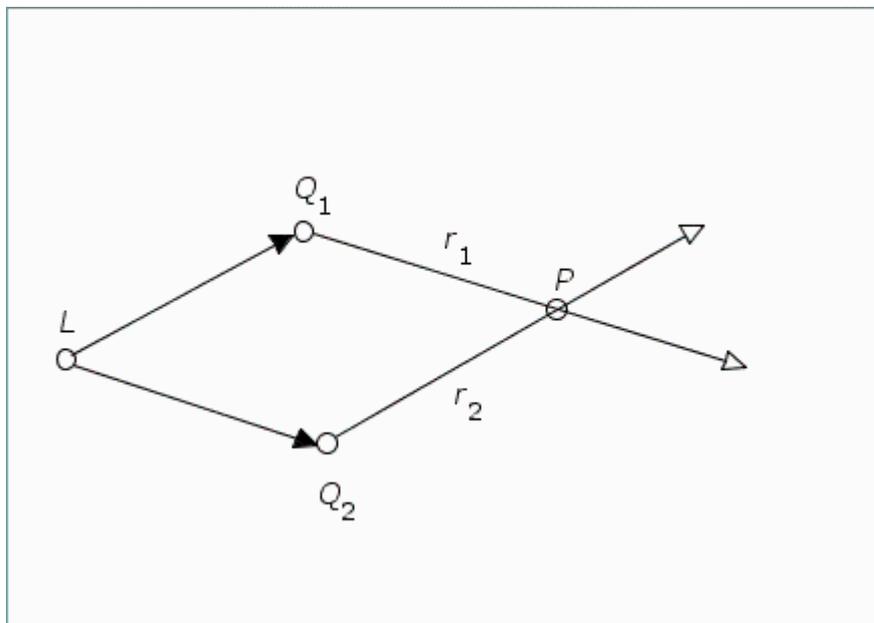
Die komplexe Schreibweise empfiehlt sich, weil dadurch die Mittelung der Intensität über die Zeit entfällt. Deshalb kann bei gleicher Frequenz (und kohärenten Wellen) auch die Zeitabhängigkeit  $e^{i \omega t}$  in diesem Zusammenhang weggelassen werden.

Die Amplituden  $A_i$  sind hier Skalare (Polarisation wird also nicht berücksichtigt), die für ebene Wellen (Näherungen siehe unten) konstant sind und für Kugelwellen mit  $1/r$  abnehmen.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ist die Wellenzahl.

Wenn es sich bei  $Q_1$  und  $Q_2$  um zwei Sender handelt, müssen die Phasen  $\phi_i$  bekannt sein.

Wenn es sich bei  $Q_1$  und  $Q_2$  um zwei Streuzentren (aber auch Elementarzentren) handelt, wenn also - wie in der Optik (oder allgemeiner elektromagnetischen Wellen) eigentlich immer der Fall -  $Q_1$  und  $Q_2$  von einer Lichtquelle  $L$  beleuchtet werden,



müssen die Phasen  $\phi_i$  aus den Abständen von  $L$  zu  $Q_i$  berechnet werden.

- Die Interferenz zweier Wellen ist der elementare Baustein zur Berechnung von Interferenz und Beugung jeglicher Art.

Der "Rest" geht nach dem Baukastenprinzip:

Hat man mehr als zwei Streuzentren/Quellen, so müssen die Amplituden aller Wellen summiert werden:

$$\text{Intensität} = \left| \sum_{m=1}^n A_m e^{ikr_m + \phi_m} \right|^2 \quad (2)$$

Die Summation über endlich viele (punktförmige) Quellen kann immer exakt berechnet werden: Vielstrahlinterferenz, siehe

- [Punktgitter](#)
- [Kreuzgitter](#)
- [Raumgitter](#)

Hat man unendlich viele Zentren (z.B. die Elementarzentren in einem Spalt endlicher Breite), so muss man integrieren:

$$\text{Intensität} = \left| \int_Q A_q e^{ikr_q + \phi_q} dr_q \right|^2 \quad (3)$$

Wobei das Integral  $\int_Q \dots dr_q$  über den Bereich  $Q$  der Quellen zu nehmen ist, also im schlimmsten Fall ein Mehrfachintegral mit  $dr_q = du_q dv_q dw_q$  für  $Q(u, v, w)$ . Für diese Integrale ist leider keine Stammfunktion bekannt, also muss man numerisch integrieren oder Näherungen verwenden, siehe Beugung an einer

- [Rechteckblende](#)
- [Dreieckblende](#)
- [Lochblende](#)
- [Kante](#)

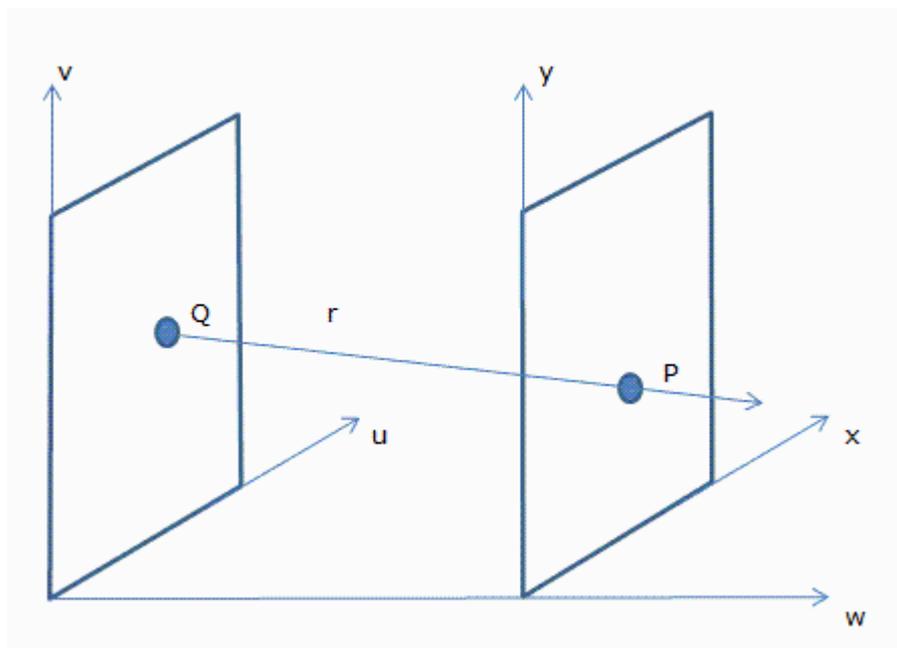
**Näherungen**

Hier mehr vom Standpunkt der angewandten Mathematik aus: Wie lassen sich Interferenz und Beugung mit möglichst wenig Rechenzeit visualisieren - vielleicht sogar interaktiv (mit Maple)?

Man hat es mit folgenden Integralen zu tun (Fresnel-Kirchhoff):

$$\iint \frac{e^{-ik\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + w^2}}}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + w^2}} du dv \tag{4}$$

Dabei wurde (als Beispiel) folgendes Koordinatensystem verwendet:



Die Quellen  $Q$  liegen in der  $u$ - $v$ -Ebene. Der Interferenzpunkt  $P$  liegt in der zur  $u$ - $v$ -Ebene parallelen  $x$ - $y$ -Ebene, die zur Ebene der Quellen den Abstand  $w$  hat. Die Phase der Streuwellen ist hier nicht berücksichtigt (ebene Wellen treffen senkrecht auf die  $u$ - $v$ -Ebene).

Die Integration bereitet Probleme, weil die Stammfunktionen nicht bekannt sind. Entweder man integriert numerisch oder man verwendet Näherungen.

**Die erste Vereinfachung** ist, mit ebenen Wellen zu rechnen, also in der Amplitude die  $1/r$ -Abhängigkeit wegzulassen. Aber auch für

$$\iint e^{-ik\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + w^2}} du dv \tag{5}$$

ist keine Stammfunktion bekannt.

**Eine weitere Näherung** besteht in der Reihenentwicklung der Wurzelfunktion (hier nur für eine Koordinate):

$$\sqrt{(x-u)^2 + w^2} = w + \frac{1}{2w} (x-u)^2 - \frac{1}{8w^3} (x-u)^4 + O((x-u)^6) \tag{6}$$

Für  $k(x-u)^2 < w$  (also insbesondere für kleine Winkel) kann man versuchen, z.B. folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{-\frac{1}{2}ik \frac{((x-u)^2 + (y-v)^2 + w^2)}{w}} du dv \tag{7}$$

Als Beispiel wurde eine rechteckige Blende der Länge  $2a$  und der Breite  $2b$  gewählt (ohne von  $u$  und  $v$  unabhängige Faktoren). Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

### 1. Fresnelbeugung:

Leider ist der Begriff Fresnelbeugung nicht exakt definiert. Die gängigste Verwendung ist:

- Fresnelbeugung bedeutet "divergentes Licht" (punktförmige Lichtquelle wie in der Prinzipskizze oben) oder "Nahzone" (zu P konvergierendes Licht). Wenn man von "Fresnelnäherung" spricht und damit obige Näherung meint, wird die Gültigkeit dieser Näherung stark strapaziert, weil in der Nahzone meistens  $k(x-u)^2 > w$  gilt. (Empfohlene Literatur: Landau-Lifschitz II (Klassische Feldtheorie); Jackson Classical Electrodynamics.)

Immerhin gibt es in der "Fresnelnäherung" geschlossene Darstellungen für das Integral:

$$\begin{aligned}
 k \left( \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{-\frac{1}{2} i k \frac{(x-u)^2 + (y-v)^2 + w^2}{w}} du dv \right) &= -\frac{1}{2} i w \pi \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right) \sqrt{k} (a+x)}{\sqrt{w}} \right) \right. \\
 &+ \operatorname{erf} \left( \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right) \sqrt{k} (a-x)}{\sqrt{w}} \right) \left. \right) e^{-\frac{1}{2} i k w} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right) \sqrt{k} (b+y)}{\sqrt{w}} \right) \right. \\
 &+ \left. \operatorname{erf} \left( \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right) \sqrt{k} (b-y)}{\sqrt{w}} \right) \right) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Darin ist erf() die Fehlerfunktion, die sich auch in Fresnelintegrale umwandeln lässt (rechte Seite obiger Gleichung):

$$\begin{aligned}
 &- \left( \operatorname{FresnelC} \left( \frac{i \sqrt{k} (a+x)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) + i \operatorname{FresnelS} \left( \frac{i \sqrt{k} (a+x)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) + \operatorname{FresnelC} \left( \frac{i \sqrt{k} (a-x)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) \right. \\
 &+ \left. i \operatorname{FresnelS} \left( \frac{i \sqrt{k} (a-x)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) \right) \pi w e^{-\frac{1}{2} i k w} \left( \operatorname{FresnelC} \left( \frac{i \sqrt{k} (b+y)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) \right. \\
 &+ \left. i \operatorname{FresnelS} \left( \frac{i \sqrt{k} (b+y)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) + \operatorname{FresnelC} \left( \frac{i \sqrt{k} (b-y)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) + i \operatorname{FresnelS} \left( \frac{i \sqrt{k} (b-y)}{\sqrt{w} \sqrt{\pi}} \right) \right) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Nun ja, sehr erfreulich sieht das auch nicht aus, zumal man für die Intensität noch das Betragsquadrat bilden muss. Aber im Vergleich zur numerischen Integration spart es Rechenzeit.

### 2. Fraunhoferbeugung

Fraunhoferbeugung bedeutet paralleles Licht, also Fernzone. Hier sind sich alle einig. Noch erfreulicher ist, dass sich dann die Integrale stark vereinfachen:

In

$$\frac{(x-u)^2}{w} = \frac{x^2}{w} - \frac{2xu}{w} + \frac{u^2}{w} \quad (10)$$

können die quadratischen Terme wegen  $x, u < w$  vernachlässigt werden und man erhält (wieder am Beispiel der Rechteckblende und unter Fortlassung von Proportionalitätskonstanten):

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{\frac{i k (x u + y v)}{w}} du dv = -\frac{\left( e^{-\frac{i k (x a + y b)}{w}} - e^{\frac{i k (x a - y b)}{w}} - e^{-\frac{i k (x a - y b)}{w}} + e^{\frac{i k (x a + y b)}{w}} \right)}{k^2 y x} \quad (11)$$

Was "nichts weiter" ist als die "Fouriertransformierte der Blende" und sich vereinfachen lässt zu

$$Amplitude = \frac{-2w^2 \cos\left(\frac{k(xa+yb)}{w}\right) + 2w^2 \cos\left(\frac{k(xa-yb)}{w}\right)}{k^2 y x} \quad (12)$$

Das Beugungsmuster ist also "reziprok zum Beugungsobjekt": kleine Blende - starke Beugung! Aber das wussten wir ja schon immer...

© M. Komma 10/2010

['Moderne Physik mit Maple'](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

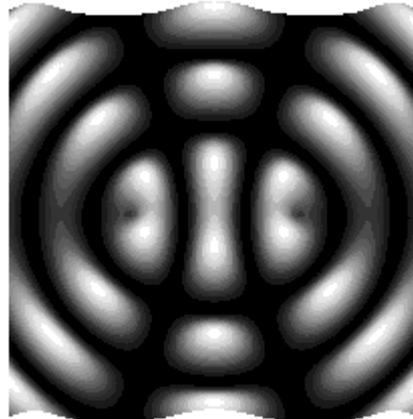
[Top](#)

## Interferenzmuster (nicht nur) am Doppelspalt

Die Wellenlänge wird verändert.

Der Abstand der Zentren bleibt konstant.

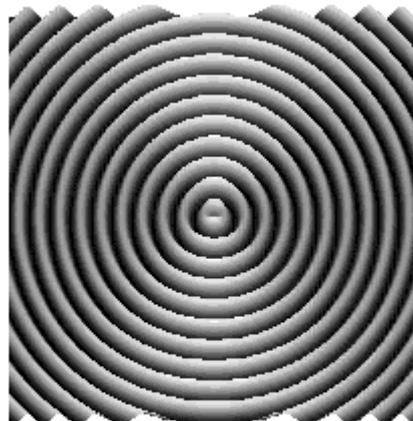
Was lernen wir daraus?



Der Abstand der Zentren wird verändert.

Die Wellenlänge bleibt konstant.

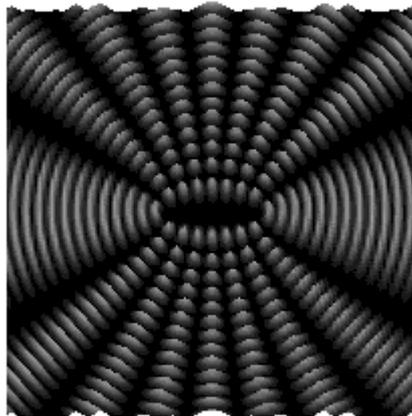
Was lernen wir daraus?



Was wir daraus lernen?

Je kleiner die Wellenlänge *im Vergleich zu den Abmessungen der beugenden Anordnung* ist, desto weniger werden die Wellen gebeugt.

Natürlich interferieren Wellen immer - nur merkt man es nicht immer. R.P. Feynman hat sich dazu ein geniales Experiment ausgedacht (und ich erlaube mir, dieses Experiment hier etwas zu modifizieren ;-)):



Beginnend mit zwei Öffnungen werden zwischen diesen zwei Öffnungen weitere äquidistante Löcher in einen Schirm gebohrt. So kommt man von der Welle zum Strahl (oder Propagator).

Anmerkung: In allen Animationen gehen die Wellen von punktförmigen Zentren aus.

['Moderne Physik mit Maple'](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Reflexion und Brechung

Die Reflexion und Brechung von Licht (oder allgemeiner von elektromagnetischen Wellen) wird in der Elektrodynamik durch zwei Bedingungen beschrieben:

- Stetigkeit der Tangentialkomponenten der Wellenvektoren ( $k = 2\pi/\lambda$ ). Zusammen mit der vom Medium abhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit ergeben sich mit dieser "kinematischen Bedingung" das Reflexions- und Brechungsgesetz (*Snellius*).
- Stetigkeit der Feldstärken (Normalkomponenten von D und B, Tangentialkomponenten von E und H): Diese Randbedingungen führen auf die *Fresnelschen Formeln*.

Die Animationen auf dieser Seite wurden mit Maple nach oben genannten Gesetzen berechnet und sollen veranschaulichen:

- Die Kinematik der Reflexion und Brechung: [Wellenvektoren](#)
- Die Fresnelschen Formeln: [Feldstärken](#) und Polarisation
- [Wellen](#)

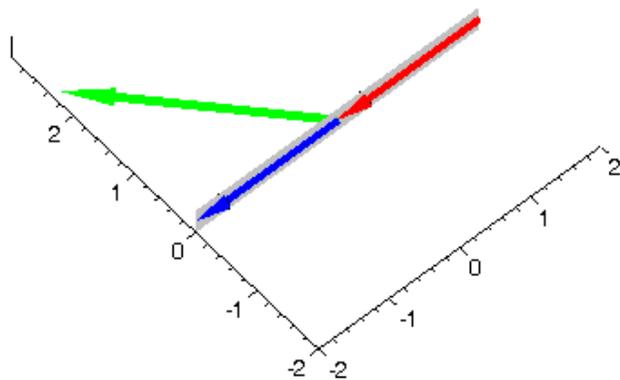
Für alle Darstellungen und Beschreibungen gilt:

- "Vakuum" steht für optisch dünneres Medium, "Medium" steht für optisch dichteres Medium.
- Der Einfallswinkel wird von  $-90^\circ$  bis  $90^\circ$  (gemessen zum Einfallslot) variiert. Die relative Brechzahl ist 1.5.
- Die Trennfläche (Vakuum - Medium) liegt in der x-y-Ebene, die z-Achse ist das Einfallslot und die x-z-Ebene ist die Einfallsebene.
- Der einfallende Strahl ist rot, der reflektierte Strahl ist blau und der gebrochene Strahl ist grün dargestellt.
- Es ist immer der Realteil der Feldstärke dargestellt.

Wellenvektoren: Das Reflexions- und Brechungsgesetz

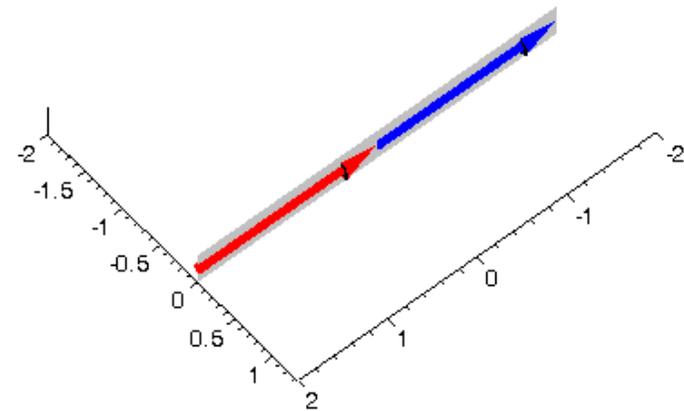
Vom Vakuum ins Medium

Vom Medium ins Vakuum



Die Trennfläche ist grau schattiert.

Beim Übergang vom Vakuum ("rechts unten") ins Medium ("links oben") wird der Strahl zum Lot hin gebrochen. Der Betrag des Wellenvektors ist im Medium größer als im Vakuum (hier das 1.5-fache) - Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit sind kleiner als im Vakuum. Die Tangentialkomponenten aller Wellenvektoren sind gleich. Der größte Brechungswinkel wird bei streifender Inzidenz erreicht.

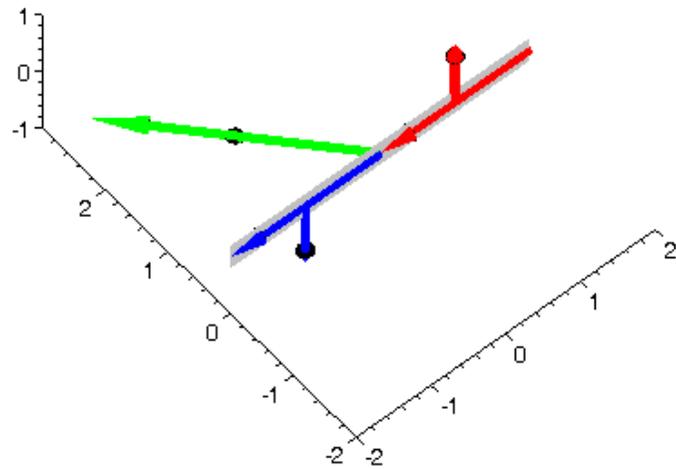


Beim Übergang vom Medium ins Vakuum wird der Strahl vom Lot weg gebrochen. Der Betrag des Wellenvektors ist im Medium größer als im Vakuum. Die Tangentialkomponenten aller Wellenvektoren sind gleich. Die Umkehrung des Strahlengangs führt allerdings zu einer Besonderheit. Wenn im Vakuum die Tangentialkomponente des Wellenvektors größer wird als der (dort "erlaubte") Betrag des Wellenvektors, wird die Normalkomponente imaginär, d.h., das Licht kann nicht ins Vakuum übergehen: Totalreflexion.

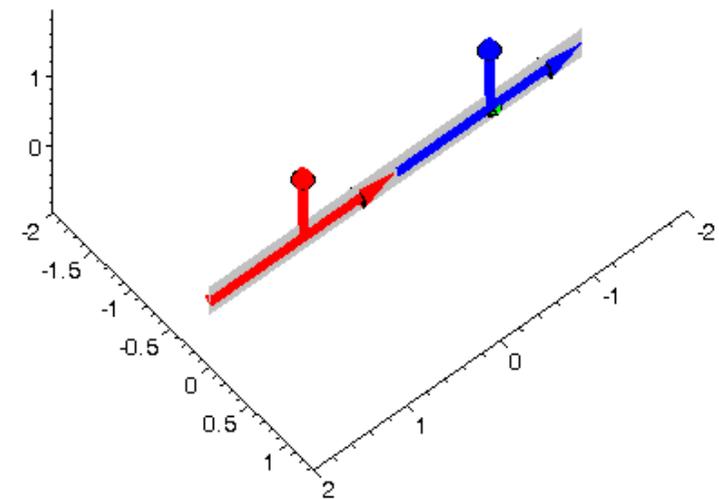
## Feldstärken

Hier wird nur die elektrische Feldstärke dargestellt (mit den Fresnelschen Formeln für die Permeabilitäten  $\mu = \mu'$ ).

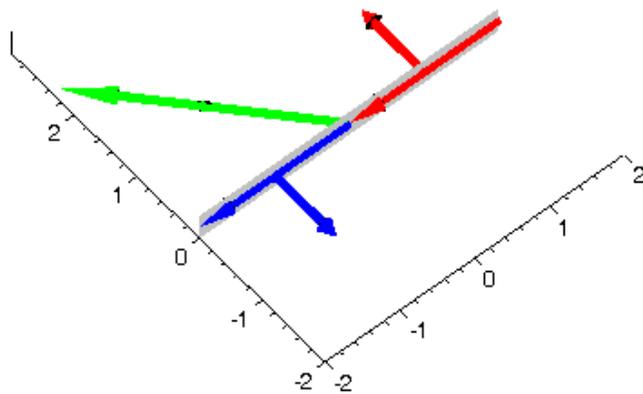
Je nach Polarisation zeigen die Pfeile für die elektrische Feldstärke von der Mitte der Wellenvektoren senkrecht nach oben oder unten (Polarisation senkrecht zur Einfallsebene, kurz "senkrechte Polarisation") oder liegen in der Einfallsebene (kurz "parallele Polarisation"). In der linken Spalte ist weiterhin der Übergang vom Vakuum ins Medium dargestellt, in der rechten Spalte der Übergang vom Medium ins Vakuum.



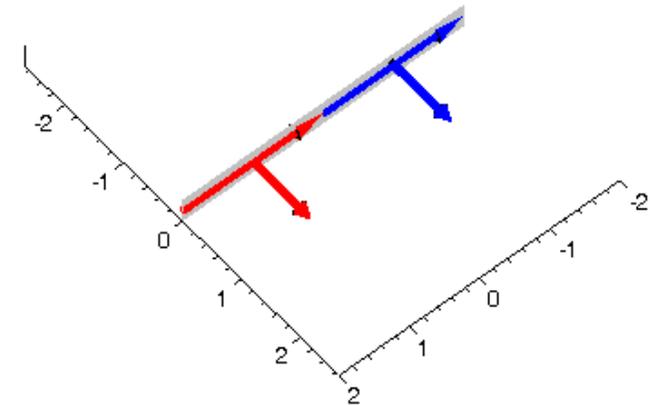
Die "senkrechte Polarisierung" zeigt beim Übergang vom Vakuum ins Medium "keine Auffälligkeiten": In der Regel bleibt die größte Feldstärke für den gebrochenen Strahl übrig. Nur bei streifender Inzidenz wird alles reflektiert. Die Phase der am dichteren Medium reflektierte Welle ist um  $180^\circ$  gegen die Phase der einfallenden Welle verschoben.



Beim Übergang vom Medium ins Vakuum fällt auf, dass bei "senkrechter Polarisierung" die Feldstärke im Vakuum für einige Winkel größer ist, als die Feldstärke des einfallenden Strahls im Medium - insbesondere im Falle der Totalreflexion. Aber keine Sorge: Wenn man die Änderung des Strahlquerschnitts berücksichtigt, bleibt die Energie erhalten. Bei der Totalreflexion werden die Amplituden der Feldstärken der reflektierten Welle und der evaneszenten Welle komplex und der Betrag der reflektierten Amplitude gleich dem Betrag der Amplitude einfallenden Strahlung. Die Animation zeigt den Realteil der Amplituden.



Der aufmerksame Betrachter stellt fest, dass bei einem bestimmten Winkel (-betrag) die Feldstärke im reflektierten Strahl Null ist - wenn nämlich der gebrochene Strahl senkrecht auf dem reflektierten steht. Wenn das elektrische Feld parallel zur Einfallsebene polarisiert ist, zeigt bei diesem *Brewsterschen Winkel* die Achse der Dipole des Mediums in Richtung des reflektierten Strahls. Von der Oberfläche des Mediums wird also keine Strahlung reflektiert.



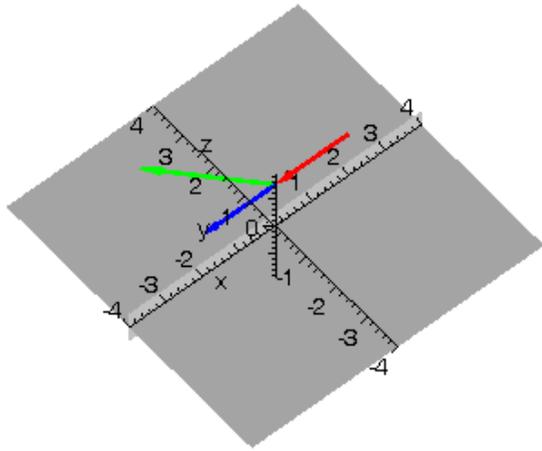
Beim Übergang vom Medium ins Vakuum ist bei "paralleler Polarisation" der Sachverhalt "noch etwas komplexer": *Brewsters Gesetz* gilt auch beim Übergang vom Medium ins Vakuum und wenn man - wie hier - den Realteil der Amplituden betrachtet sogar für zwei Winkel (-beträge) des einfallenden Strahls. Die Komplexität der Amplituden spiegelt übrigens wider, dass sich die Phasen des reflektierten und gebrochenen Strahls ändern - und damit ihr Polarisationscharakter.

### Wellen

Diese Pfeile sind doch etwas abstrakt! Wir sollten uns ansehen, was mit einer ebenen Welle passiert, wenn sie unter verschiedenen Winkeln auf ein Medium mit ebener Oberfläche trifft oder es verlässt. Dargestellt ist jeweils eine Momentaufnahme (zur Zeit 0) der Wellen. Auf der Seite der einfallenden Welle (roter Wellenvektor) wird die reflektierte Welle (blauer Wellenvektor) überlagert. Im Falle komplexer Amplituden ist der Realteil dargestellt.

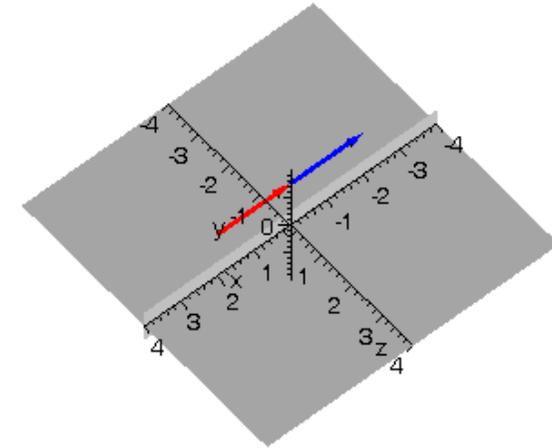
Vom Vakuum ins Medium

Vom Medium ins Vakuum



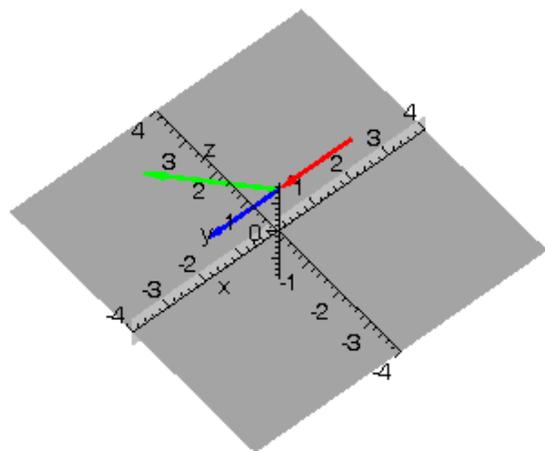
#### Polarisation senkrecht zur Einfallsebene:

Durch die Interferenz der reflektierten Welle mit der einfallenden Welle (und durch die Wahl des Zeitpunkts der Momentaufnahme) kann in den Interferenzmaxima die Amplitude wesentlich größer als in der gebrochenen Welle erscheinen.



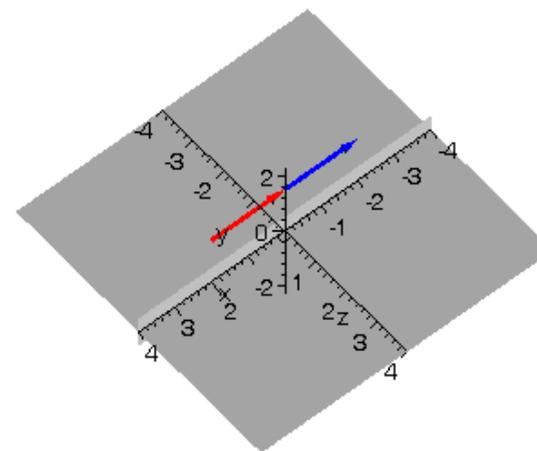
#### Polarisation senkrecht zur Einfallsebene:

Bei Totalreflexion klingt die Amplitude der evaneszenten Welle exponentiell ab (was mathematisch dadurch beschrieben wird, dass die Normalkomponente des Wellenvektors imaginär wird). Wie weit das Licht ins Vakuum tunnelt, hängt vom Einfallswinkel, dem Medium und der Polarisation ab.



Polarisation parallel zur Einfallsebene:

Der Brewstersche Winkel ist daran zu erkennen, dass die Wellenfronten der einfallenden Welle ungestört sind.



Polarisation parallel zur Einfallsebene:

Auch hier gibt es einen Brewsterschen Winkel. Die Amplitude der evaneszenten Welle (und damit ihre Reichweite ins Vakuum) kann größer als bei "senkrechter Polarisation" werden.

Links:

- Reflexion und Brechung mit [Laufenden ebenen Wellen und Wellenpaketen](#)
- [Fresnelsche Formeln](#)

To Do...

- allgemeine Polarisation
- komplexe Amplituden
- weitere Details

'Moderne Physik mit Maple'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Licht im Medium

frei nach R.P. Feynman, The Origin of the Refractive Index

"Warum bewegt sich Licht im Medium langsamer als im Vakuum?"

Man liest bisweilen die Erklärung, dass die Photonen in den Atomen des Mediums kurz anhalten ("Absorption und Reemission") und so das Licht gebremst wird, also seine *Phasengeschwindigkeit* kleiner wird. Manche Wiki-Physiker berufen sich mit dieser Erklärung auf die Feynman-Lectures (Vol. I, 31), obwohl dort das genaue Gegenteil steht:

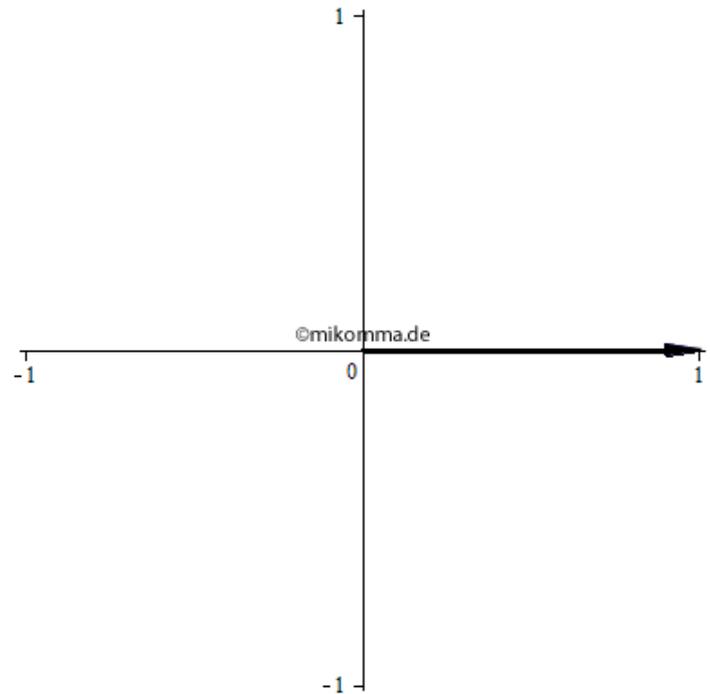
Feynman verwendet das klassische Modell. Das Medium besteht aus (gedämpften) Oszillatoren, die von der primären Lichtwelle zu Schwingungen angeregt werden. Außerhalb der Resonanzfrequenz der Oszillatoren (Atome mit Dipolmoment) findet keine Absorption statt und die Oszillatoren werden zu einer Schwingung gezwungen, die unterhalb ihrer Resonanzfrequenz in Phase mit der primären Lichtwelle ist, wobei sich die primäre Lichtwelle auch im Medium mit Vakuumlichtgeschwindigkeit bewegt. Soweit nichts Neues, das ist die klassische Berechnung des Brechungsindex. Aber nun kommt Feynmans "Trick":

Frei nach Huygens (oder Feynmans Pfadintegralen?) muss die (komplexe) Amplitude der Welle in jedem Raumpunkt die Summe der Amplituden aller Elementarwellen, die diesen Punkt erreichen, sein. Also berechnet Feynman die Amplitude der elektrischen Feldstärke, die von einer dünnen (ebenen) Schicht von Oszillatoren in einem Punkt hinter dieser Schicht erzeugt wird. Und - man staune! - die von einer Schicht resultierende gestreute Welle hinkt der Primärwelle um  $90^\circ$  hinterher. Addiert man die Amplitude der gestreuten Welle zur Amplitude der Primärwelle, so ergibt sich für die hinter der dünnen Schicht resultierende Welle die erwartete Verzögerung.

## Feynmans Phasenschieber

Stellt man die komplexe Amplitude der primären Welle als schwarzen Pfeil (in der komplexen Ebene) dar, so wird ihre *Phase* nach jeder dünnen Schicht verzögert (kleine rote Pfeile). Das Ergebnis ist der blaue Pfeil - im Folgenden "die resultierende Welle". (Siehe Feynman Lectures Vol. I, Fig. 31-3.)

Für das Weitere noch eine Anmerkung: "Streuung" heißt in diesem Zusammenhang immer *kohärente* Streuung, genauer gesagt *kohärente Vorwärtsstreuung*. Der rote Pfeil, der vom schwarzen Pfeil zum blauen Pfeil zeigt, ist also die Summe aller (komplexer) Amplituden der *Sekundärwellen* mit fester Phasenbeziehung zur Primärwelle.



Also wie funktioniert das nun? Es gibt zwei Arten der Modellierung:

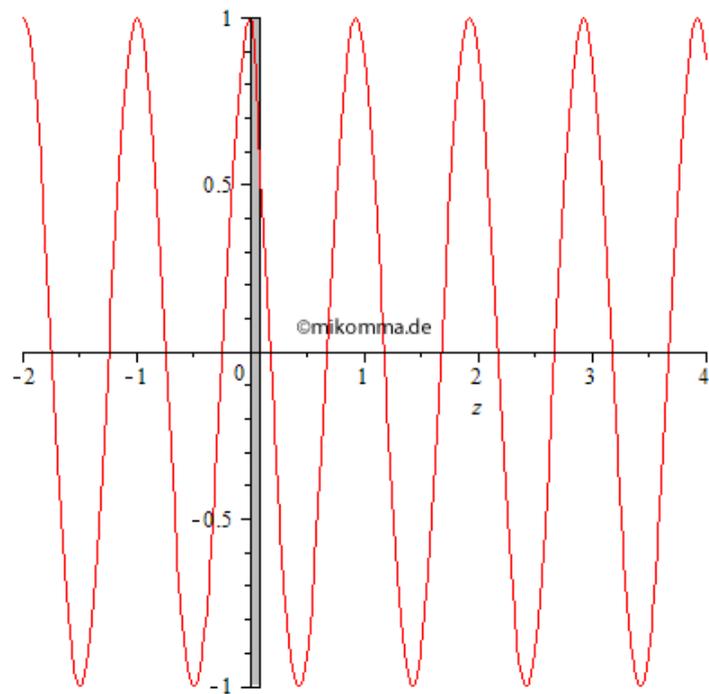
1. Iteration: Die Phasenverschiebung der gestreuten Wellen wird multiplikativ (Faktor  $\exp(i\cdot\phi)$ ) berücksichtigt, also eine UND-Verknüpfung der Pfade.
2. Huygens pur: Alle Elementarwellen werden aufsummiert, also eine ODER-Verknüpfung der Pfade.

### 1. Iteration

Feynmans Näherung gilt für eine dünne Schicht. Aber man kann natürlich das Verfahren wiederholen und mehrere dünne Schichten hinter einander setzen. Die nebenstehende Animation zeigt das Ergebnis, wenn man in der Berechnung die Zeit festhält und die Dicke des Mediums (grau) anwachsen lässt: Hinter dem Medium (rechts) läuft die Welle nicht rückwärts, sondern wird immer

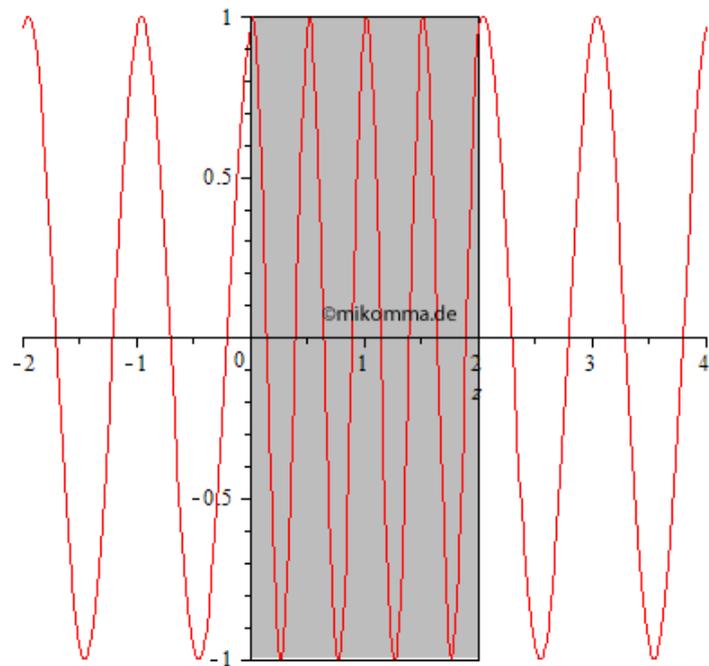
stärker verzögert. Das gilt natürlich auch im Medium, wo deshalb die Wellenlänge kürzer ist.

Die kürzere Wellenlänge im Medium ist aber nicht auf eine kleinere *Phasengeschwindigkeit* zurückzuführen, sondern auf eine Phasenverschiebung durch die gestreute Welle. Die *Phasengeschwindigkeit* einer elektromagnetischen Welle, die von einer einzelnen oszillierenden Ladung ausgeht, hat überall den Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Erst durch die Überlagerung mit anderen Wellen kann es zu einer *scheinbaren* Verlangsamung der *Phasengeschwindigkeit* kommen. Aber es ist natürlich zweckmäßig, mit dieser *scheinbaren* Phasengeschwindigkeit (verkürzte Wellenlänge durch unveränderte Frequenz) zu rechnen.



Das Experiment, in dem die Dicke des Mediums zu einem festen Zeitpunkt variiert wird, muss erst noch erfunden werden. Wir berechnen also nach obiger Methode den Durchgang einer Lichtwelle durch ein Medium:

In der nebenstehenden Animation wurden 100 dünne Schichten mit dem Brechungsindex 2 zu einem Medium (grau) mit der Dicke 2 zusammengesetzt. Die resultierende Welle wurde von Schicht zu Schicht iterativ berechnet.



Beim ersten Lesen denkt man bei Feynmans Ausführungen an Hokuspokus, weil in die Berechnung das hineingesteckt wird, was herauskommen soll: Eine Phasenverschiebung der Welle hinter dem Medium, die zunächst als *Produkt* zweier komplexer Zahlen dargestellt wird (wie in den obigen Darstellungen). Aber Feynman geht der Sache auf den Grund. Die Physik muss in der Überlagerung von Wellen, also der *Summe* komplexer Zahlen zu finden sein - frei nach Huygens. Die folgenden Animationen sind nach diesem Prinzip berechnet (im Gegensatz zu Feynmans Lectures nicht in Näherung erster Ordnung, sondern exakt).

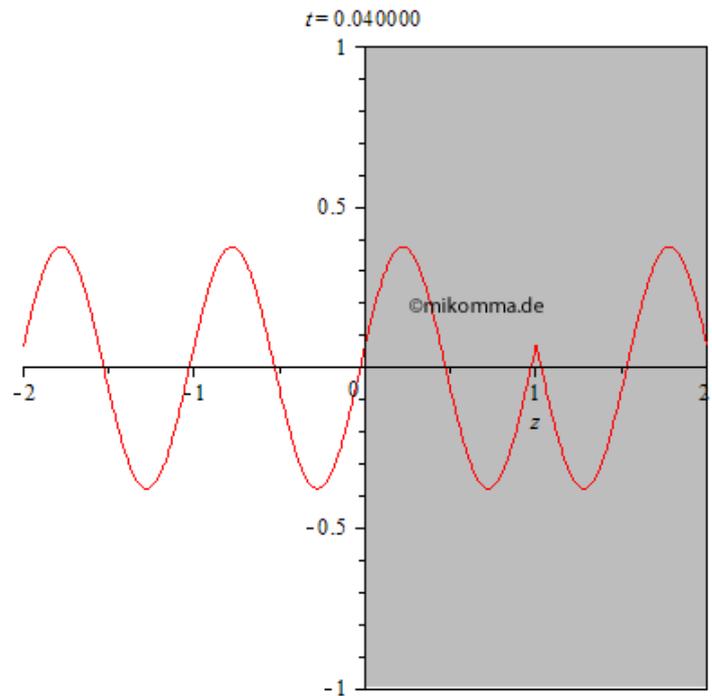
Man wird sehen: Der iterative Ansatz ist eher phänomenologisch. Die echte Physik steckt in Huygens' Prinzip.

## 2. Huygens

Eine ebene Welle (im Bild nicht dargestellt) trifft in z-Richtung auf ein Medium und erzeugt dort an den "Streuzentren" sekundäre Elementarwellen (rot).

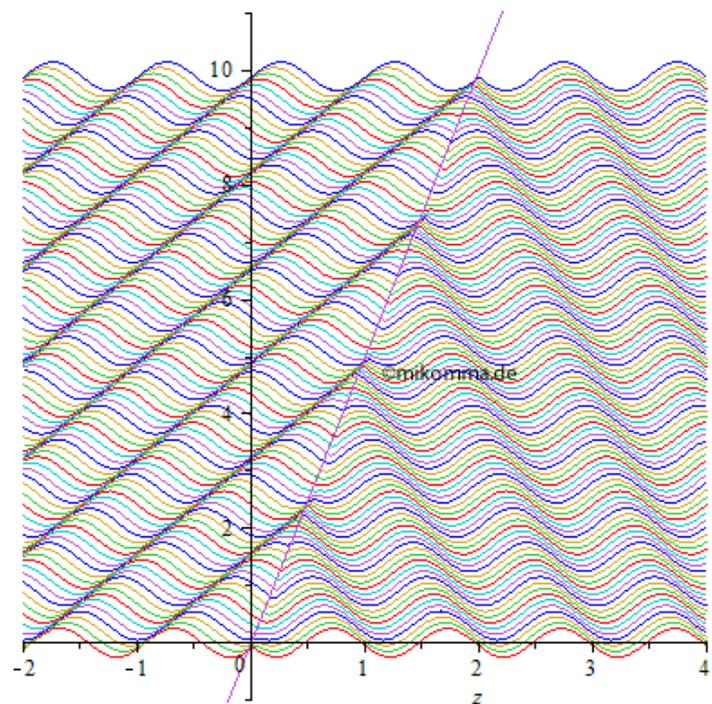
Alle Elementarwellen bewegen sich mit Vakuumlichtgeschwindigkeit - auch im Medium. Nur ihre Phase hängt vom Medium ab. Rechts ist eine solche Elementarwelle dargestellt (mit überhöhter Amplitude), die ihr Zentrum in der Mitte des Mediums hat und sich von dort in positive und negative z-Richtung ausbreitet. (Natürlich gehen von Elementarzentren Kugelwellen aus, aber die Darstellung einer 'eindimensionalen Welle' ist etwas übersichtlicher :-)

Siehe auch [Form aus Kohärenz](#)



Unterteilt man das Medium in 100 Schichten, so bekommt man 100 Elementarwellen, die rechts der eingezeichneten Hilfsgeraden nach rechts und links der Hilfsgeraden nach links laufen. In der nebenstehenden Momentaufnahme sind die Wellen gestapelt dargestellt. Tatsächlich interferieren alle Wellen (längs der z-Achse). Entscheidend für das Resultat ist ihre Phasenbeziehung:

In einem homogenen Medium (wie hier vorausgesetzt, oder im Vakuum) interferieren die Elementarwellen nur in Vorwärtsrichtung konstruktiv, löschen sich also in alle anderen Richtungen aus: "kohärente Vorwärtsstreuung". Ist das Medium nicht homogen (ändert sich der Brechungsindex in Abständen, die nicht wesentlich größer sind als die Wellenlänge), tritt Streuung mit Richtungsänderung auf (also die "normale Streuung"), weil die Kohärenz verloren geht.

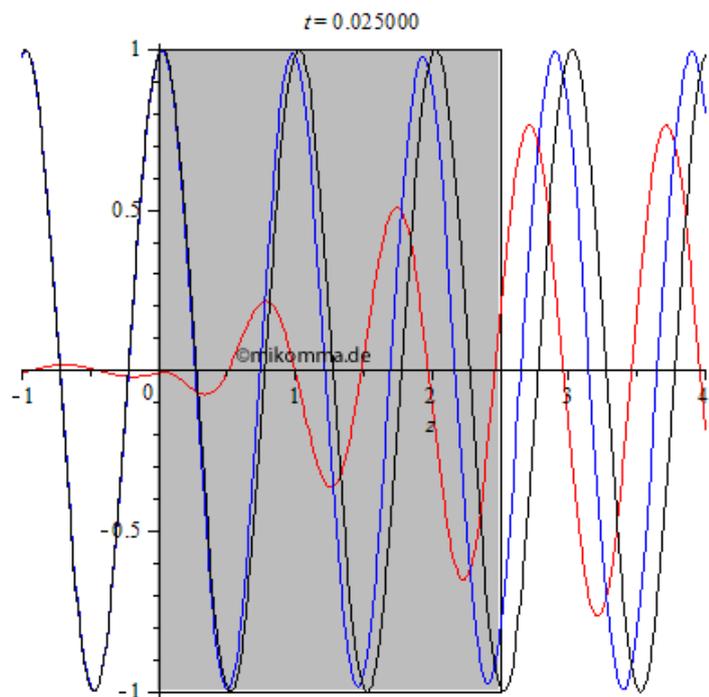


Für die folgenden Darstellungen gilt: Die Primärwelle ist schwarz dargestellt. Die gestreute Welle rot und die resultierende (primär + gestreut) blau. Alle Wellen werden komplex berechnet, die Darstellungen zeigen den Realteil.

Wir beginnen mit einem kleinen Brechungsindex  $n = 1.05$ : Wie zu erwarten baut sich eine gestreute Welle im Medium auf und ein kleiner Teil wird reflektiert.

Die Überlagerung der gestreuten Welle mit der Primärwelle ergibt hinter dem Medium (rechts) eine verzögerte resultierende Welle.

Man vergleiche "[Form aus Kohärenz](#)"!

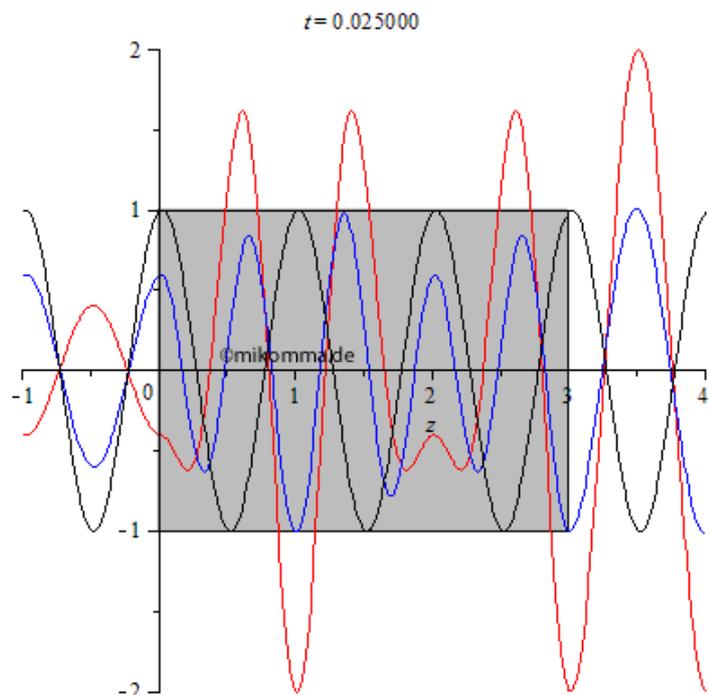


Bei einer Brechzahl von  $n = 1.5$  und der Dicke des Mediums  $d = 3$  wird wesentlich mehr reflektiert und es bildet sich links vom Medium eine "stehende Welle mit Schwebung". Im Medium ergibt sich aber nicht das Bild, das man mit dem iterativen Ansatz von oben bekommt, was diesen Ansatz als phänomenologisch enttarnt: Die landläufige Vorstellung der Sinuswelle mit verkürzter Wellenlänge im Medium trifft eben nicht zu, zumindest nicht, wenn das Medium nur drei Wellenlängen dick ist. Aber hinter dem Medium (rechts) stimmt jedenfalls die Verzögerung der resultierenden Welle gegenüber der Primärwelle!

Aber was ist mit den Amplituden der gestreuten Welle im Medium und hinter dem Medium? Sie ist größer als die Amplitude der Primärwelle! Kein Grund zur Beunruhigung:

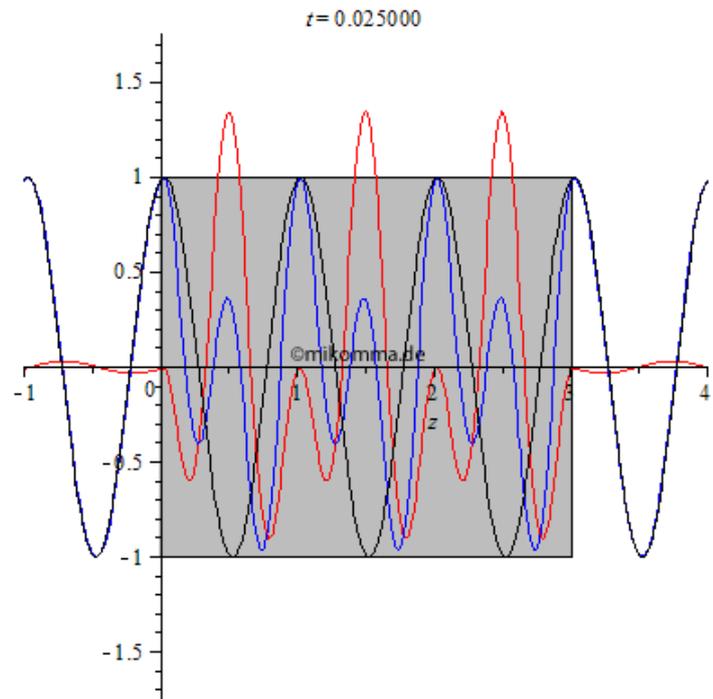
1. Die Animation zeigt den Realteil der Wellen (siehe auch unten Methode).

2. Das Modell der erzwungenen (ungedämpften) Schwingung geht davon aus, dass der Resonator dem Erreger (Primärwelle) keine Energie entzieht. (Siehe auch R.P.F. Gl. 31.2.)



Hier ist noch ein interessanter Spezialfall, bzw. ein Test für die Gültigkeit des Modells:  
Brechzahl  $n = 2$ , Dicke des Mediums  $d = 3.005$ . Was ist daran speziell? Im Medium gibt es bei passender Wahl der Parameter eine stehende Welle. Die Dicke des Mediums wurde absichtlich nicht ganz passend gewählt (3.005 statt 3), um zu veranschaulichen, dass in diesem Fall (nicht exakte Abstimmung) ein Teil der gestreuten Welle aus dem Medium entkommt (vorwärts und rückwärts). Diesen Effekt verwendet man z.B. bei der Entspiegelung von

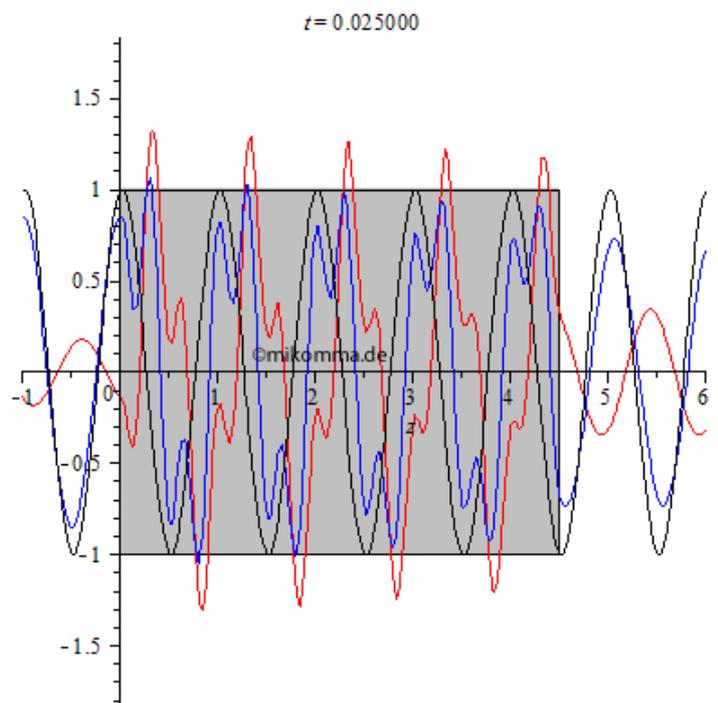
Linsen.



Neben der *kohärenten Streuung* gibt es in realen Medien immer auch *Absorption*, wenn die Frequenz der Primärwelle nahe bei der Frequenz einer Absorptionslinie der Atome des Mediums liegt. Man kann diese Absorption durch den Koeffizienten  $k$  im komplexen Brechungsindex  $n' = n(1 - i \cdot k)$  berücksichtigen. Nebenstehende Animation wurde für  $d = 4.5$ ,  $n = 3$  und  $k = 0.005$  berechnet und zeigt das erwartete exponentielle Abklingen der gestreuten und resultierenden Welle (die Primärwelle ist hier nur als Referenz ohne Abschwächung dargestellt). Es findet keine Reemission statt (die auch nicht kohärent sein könnte), sondern die Transparenz des Mediums wird kleiner (bis zur Undurchsichtigkeit).

Darüber hinaus kann die primäre Welle durch *inkohärente Streuung* (z.B. Rayleigh-Streuung) geschwächt werden. Beide Prozesse (Absorption und inkohärente Streuung) können aber nur die *Intensität* und nicht die *Phase* verändern.

Siehe auch: [Brechungsindex und Lichtstreuung](#)

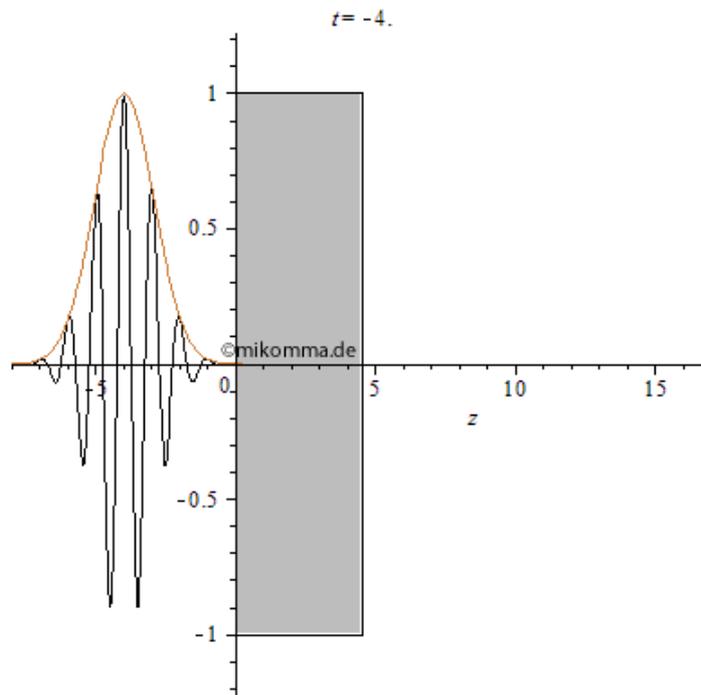


### Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit

Eine unendlich ausgedehnte Welle kommt nur in theoretischen Ansätzen vor. Was wird aus Feynmans Ansatz, wenn man ein Wellenpaket verwendet?

Für die Brechzahl  $n = 2$  (in dieser Näherung frequenzunabhängig) und die Dicke des Mediums  $d = 4.5$  sieht das etwa so aus:

Aus der Primärwelle (schwarz, Einhüllende braun) wird "eine resultierende Welle" (blau). Hinter dem Medium ist die Primärwelle mit der Einhüllenden des transmittierten Pakets (braun) als Referenz



dargestellt (Phasenverschiebung zur transmittierten Welle  $180^\circ$  bei den gewählten Parametern). Die rote Einhüllende zeigt die Bewegung des Pakets im Vakuum zum Vergleich.

Die resultierende Welle spaltet sich in der verwendeten Näherung in drei Teile auf:

Durchgehendes Paket, vorne und hinten reflektiertes Paket (Mehrfachreflexionen wurden also nicht berücksichtigt).

Anmerkung: die Näherung "frequenzunabhängige Brechzahl" gilt nur für schwach dispersive Medien. Im allgemeinen Fall muss man die [Dispersion](#) berücksichtigen.

Also so falsch kann Feynmans Ansatz (und Huygens' Prinzip) nicht sein!

1. Die Reflexion des Pakets an der vorderen und an der hinteren Grenzschicht ergibt sich "quasi von selbst".
2. Das Paket hat im Medium eine kleinere *Gruppengeschwindigkeit*.

Neuerdings macht man ähnliche Experimente sogar mit einzelnen Photonen, z.B.:

<http://www.sciencedaily.com/releases/2010/01/100126175921.htm>. Allerdings sind dort die Schichten etwas trickreicher angeordnet, so dass das Photon sogar "superluminal tunnelt".

Nun werden Sie fragen: "Wie kann ein Photon nach mehrfacher Aufspaltung am Stück absorbiert werden?" Fragen Sie mich etwas Leichteres! Aber sobald ich es weiß gibt es natürlich eine Animation zu diesem [Quantensprung](#)!

Die obigen Ausführungen bedeuten nicht, dass es "kohärente Absorption und Reemission" von Photonen nicht gibt. Mit geeigneten Vorkehrungen kann man heute Licht sogar fast zum Stillstand in geeigneten Medien bringen. Das hat aber nichts mit dem Durchgang von Licht durch Glas oder Wasser zu tun.

## Methode

In obigen Darstellungen ist nur der Realteil der komplexen Amplitude (Feldstärke) dargestellt. Was sich "hinter der Bühne" abspielt, lässt sich am besten am Beispiel des Wellenpakets veranschaulichen.

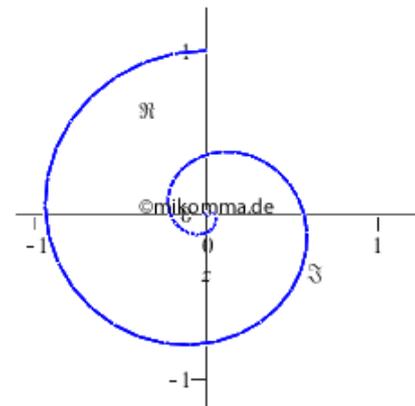
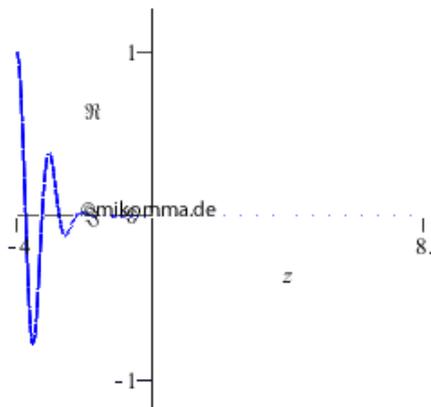
## Wellenpaket komplex:

Hier ist eine 3D-Veranschaulichung der komplexen Amplitude der resultierenden Welle für  $n = 2$  und  $d = 2.8$  (der Realteil ist nach rechts hinten abgetragen, der Imaginärteil nach oben).



Oder ist die 2D-Darstellung doch besser?

Oder so?



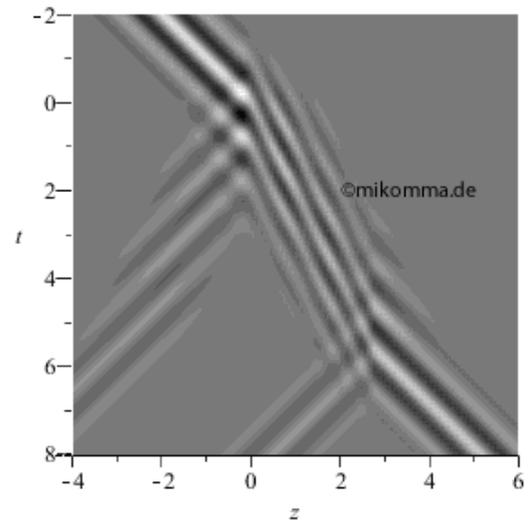
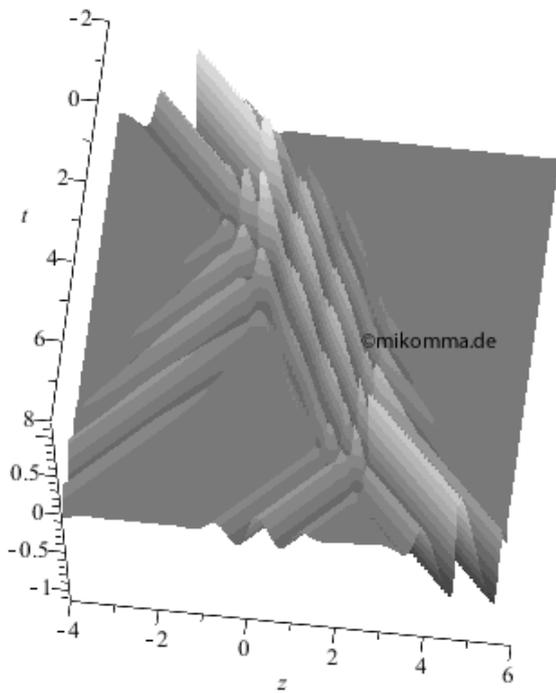
Alles nur eine Frage der Perspektive,...

die sich im Maple-Worksheet natürlich interaktiv einstellen lässt...

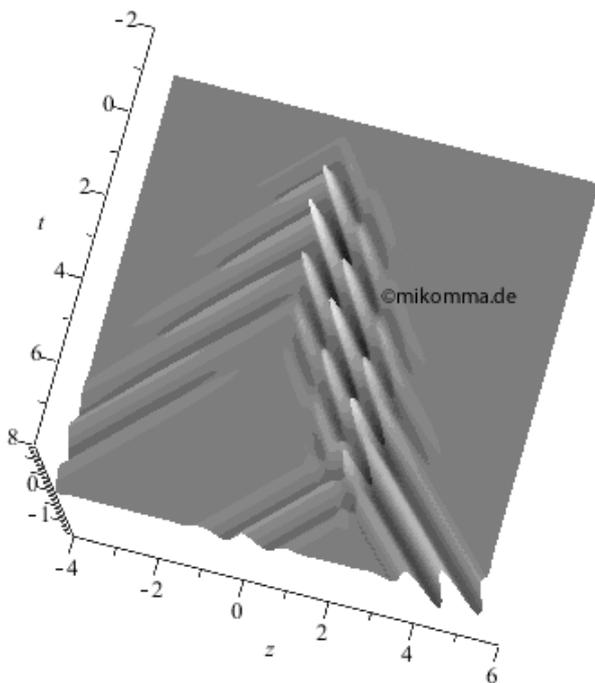
Hier ist noch eine Art der Darstellung. Das z-t-Diagramm verschafft Überblick:

Realteil der resultierenden Welle (Primärwelle + Streuwelle) 3D. Ein Bild der [Animation von oben](#) entspricht einem Schnitt parallel zur z-Achse.

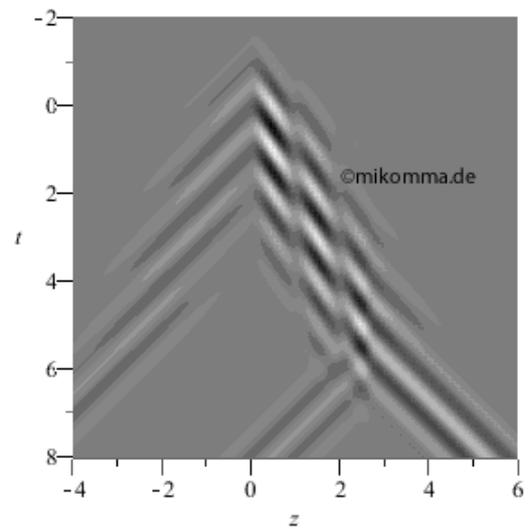
Das Ganze von oben: An den hellen Punkten sieht man die Interferenz der rückwärts laufenden Wellen mit den vorwärts laufenden.



Die Streuwelle alleine...



Die Einhüllende der Huygensschen Elementarwellen läuft nur rückwärts, wenn die Ausbreitung der Elementarwellen gestört wird.



Kritik der Methode: Sie vermissen die Wirkung der Sekundärwellen auf die "Streuzentren", die dann Tertiärwellen abstrahlen usw.? Da muss ich Sie leider mit R.P.F. vertrösten: "It is so complicated, that we postpone this problem until next year."

## Links

- [Brechungsindex und Lichtstreuung](#)
- [Dispersion](#)
- [Rechteckpulse](#)
- [Form aus Kohärenz](#)
- Reflexion und Brechung mit [Laufenden ebenen Wellen und Wellenpaketen](#)
- [Fresnelsche Formeln](#)

['Moderne Physik mit Maple'](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Brechungsindex und Lichtstreuung

Ergänzungen zu "[Warum bewegt sich Licht im Medium langsamer als im Vakuum?](#)"

Die Ausbreitung von Licht (oder allgemeiner elektromagnetischer Strahlung) in einem Medium ist ein schier unerschöpfliches Thema, wenn man alle möglichen Effekte in Betracht zieht. In diesem Artikel geht es in erster Linie um die Ausbreitung von Licht in *durchsichtigen (transparenten) Medien* (Luft, Wasser, Glas) und die Fragestellung, ob sich die Verringerung der Phasengeschwindigkeit von Licht durch eine Streuung der Lichtteilchen (Photonen) an Streuzentren (Atome, Moleküle,...) erklären lässt.

Zunächst sind ein paar Begriffsklärungen angebracht:

### Wann ist ein Medium transparent?

Wenn das Licht weder absorbiert noch gestreut wird und auch keine Lumineszenz (Fluoreszenz und Phosphoreszenz) auftritt. Bei der Absorption wird die Lichtenergie an das Medium abgegeben, ist also nicht mehr als elektromagnetische Energie vorhanden. Bei der Streuung ändert das Licht seine Richtung ohne seine Energie (Frequenz) zu ändern, die Energie fehlt also im durchgehenden Licht (in der ursprünglichen Richtung). Bei der Lumineszenz wird Licht absorbiert und (meist) mit anderer Frequenz und in andere Richtung wieder emittiert. Absorption und Lumineszenz sind Resonanzeffekte, d.h., die Frequenz des Lichtes (die Energie der Photonen) muss zu den Resonatoren (Atome, Moleküle) "passen" (mehr oder weniger). Streuung findet bei allen Energien statt (mehr oder weniger).

### Warum sind manche Stoffe manchmal transparent und manchmal nicht?

Die Beispiele Wasserdampf über dem Kochtopf und "Wasserdampf" in einer weißen Wolke oder der Ölfleck auf dem Papier zeigen, dass es nicht allein auf den Stoff ankommt, sondern auch auf seine Struktur.

### Gibt es das perfekt durchsichtige Medium?

Im Prinzip oder in der Theorie ja - in der Praxis nein!

Perfekt durchsichtig ist nur das Vakuum. Das Vakuum ist homogen (wenn man von Vakuumfluktuationen absieht :-)) und kann deshalb eine Lichtwelle nur "vorwärts streuen". Der Begriff "Vorwärtsstreuung" ist hier etwas irreführend (aber gebräuchlich), weil in Wirklichkeit nichts gestreut wird (seine Richtung im Streuzentrum ändert): Das Huygenssche Prinzip "Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Zentrum einer Elementarwelle aufgefasst werden..." gilt uneingeschränkt, d.h., das Vakuum als Überträger reproduziert jede Welle perfekt. Aus Sicht der klassischen Elektrodynamik könnte man das Vakuum auch über seine perfekte Übertragungsfunktion definieren. Dass die Wellen nur "vorwärts laufen" (genauer in Richtung der Strahlen laufen) gehört auch zu dieser Übertragungsfunktion (oder Huygens Prinzip), denn in alle andere Richtungen löschen sie sich aus, siehe auch "[Form aus Kohärenz](#)". Weil die Elementarzentren unendlich dicht liegen und immer die "richtige Phase" haben, ist im Vakuum auch die Kohärenz garantiert: die neue Wellenfront ist die Einhüllende der Elementarwellen.

Wohlgemerkt: das gilt auch für Photonen.

### Was unterscheidet ein reales (transparentes) Medium vom Vakuum?

*Zusätzlich* zu den perfekten Elementarzentren des Vakuums gibt es reale Streuzentren. Das bewirkt zweierlei:

1. Wenn das Medium vollständig homogen ist (Kristall): Die Superposition der "Streuwellen" mit den "Vakuumwellen" bewirkt eine Phasenverschiebung der resultierenden Lichtwelle. Das ist der "Ursprung des Brechungsindex"! Dabei "stret" ein idealer Kristall das Licht immer "vorwärts": Wenn die Dichte der Streuzentren wesentlich kleiner ist als die Wellenlänge des Lichts (z.B. Atomabstand = 1/1000 Lichtwellenlänge), gibt es auch in einem realen Medium nur das Interferenzmaximum nullter Ordnung, selbst für einzelne Photonen!

2. Wenn das Medium nicht perfekt homogen ist, kommt zur Phasenänderung noch eine Richtungsänderung der Lichtwelle hinzu, weil außerhalb der "Vorwärtsstreuung" nicht mehr alle Streuwellen destruktiv interferieren, also die Kohärenz verloren geht. Nun scheint ja Wasserdampf ziemlich homogen zu sein. Aber es kommt auf die Größenordnung im Vergleich zur Lichtwellenlänge an. Bei (teilweise) kondensiertem Wasserdampf ist die Ausdehnung der

Streuzentren nicht mehr kleiner als die Lichtwellenlänge. Umgekehrt ist Glas (oder ölgetränktes Papier) noch homogen genug, um (teilweise) transparent zu sein. (Boshafte Fragen: Warum ist dann Holz für Röntgenstrahlung durchsichtig und die Ionosphäre für Radiostrahlung undurchsichtig?)

Nun zu der Behauptung, dass das Licht in einem transparenten Medium "gebremst" wird, weil "die Photonen in den Atomen des Mediums kurz anhalten".

Hier ist ein relativ aktuelles Zitat (Spektrum der Wissenschaft 2/2012):

"Auch wenn man Licht nicht als Welle auffasst, sondern als Teilchenstrahlung, lässt sich die Veränderlichkeit der Phasengeschwindigkeit in einem Medium verstehen. Die Atome absorbieren die Photonen, werden dadurch angeregt und strahlen ihrerseits wieder Photonen aus, dies allerdings zeitversetzt, was einer Verzögerung entspricht."

Oder:

"Im quantenmechanischen Bild sind die Valenzelektronen über die Coulomb-Kraft an den Atomrumpf gebunden. Die einfallende Lichtwelle führt nun zu einer elektrischen Kraft die die Valenzelektronen auslenkt und diese in einen angeregten Zustand bringt. Auf Grund der Energieerhaltung muss dazu das Photon vernichtet werden. Da der angeregte Zustand in einem transparenten Medium kein Energieniveau des Materials ist (weit entfernt von einer Resonanz), fällt das Atom annähernd instantan wieder zurück in seinen Grundzustand und sendet dabei ein Photon aus; auf Grund der Energieerhaltung bei derselben Frequenz wie das, welches vernichtet wurde."

Dazu ist zu sagen:

Sowohl die klassische Beschreibung als auch die quantenmechanische verwenden das Lorentz-Modell, in dem das Coulombpotential durch das Potential des harmonischen Oszillators ersetzt wird. Bei der klassischen Beschreibung ist dabei die Auslenkung des Elektrons frequenzabhängig (Lorentzlinie). Die quantenmechanische Beschreibung macht weder über die 'Auslenkung eines Elektrons' noch über den zeitlichen Ablauf des Vorgangs eine Aussage, sondern nur über Wahrscheinlichkeiten (Streuquerschnitte). Die Aussage 'fällt das Atom annähernd instantan wieder zurück in seinen Grundzustand und sendet dabei ein Photon aus' macht also keinen Sinn. Wie lange dauert 'annähernd instantan' z.B. beim Durchgang von Licht durch Luft? Etwas ernsthafter und in *groben Zügen*:

Bei der quantentheoretischen Herleitung der Dispersionsformel (genauer des Streuquerschnitts) wird der Hamiltonoperator für die Wechselwirkung der Strahlung mit dem Elektron in zwei Anteile zerlegt: Erste Ordnung (linear im Vektorpotential  $A$ ) und zweite Ordnung (quadratisch in  $A$ ). Der Term zweiter Ordnung ist dispersionsfrei (Thomsonstreuung, 'Resonanzfrequenz' des freien Elektrons gleich 0). Beim Term erster Ordnung muss über alle Zwischenzustände (bis ins Kontinuum) summiert werden. Dabei handelt es sich um *virtuelle* Zwischenzustände *ohne* Energieerhaltung. Aber es kommt noch schlimmer: Bei der Summation über die Zwischenzustände müssen auch Zustände berücksichtigt werden, in denen das 'emittierte' Photon schon im Anfangszustand vorhanden ist und das 'ankommende' Photon erst beim Übergang in den Endzustand absorbiert wird. Selbst wenn man die Reihenfolge, in der die Operatoren der Quantenmechanik angewendet werden, mit einer zeitlichen Abfolge verwechselt, mittelt sich 'annähernd instantan' also heraus zu einer 'simultanen Absorption und Emission'.

Wer es nicht glaubt, kann rückwärts rechnen: Wenn man die naive Annahme macht, dass jedes Photon geradlinig von Atom zu Atom fliegt, bleibt zwar ungeklärt, weshalb das so ist, und der Brechungsindex müsste zur Teilchendichte bezogen auf die Länge proportional sein und nicht zur Teilchendichte bezogen auf das Volumen. Ignoriert man diese grundlegenden Probleme, dann ergibt sich z.B. für Luft ( $n = 1,0003$ ) annähernd instantan =  $10^{(-21)}$ sec und für Wasser ( $n = 1,3$ ) annähernd instantan =  $10^{(-19)}$ sec. Die zugehörigen Emissionsprozesse hätten also eine Linienbreite von der Größenordnung  $10^{20}$ Hz, was um fünf Größenordnungen über der Frequenz von sichtbarem Licht liegt!

"Die Veränderlichkeit der *Phasengeschwindigkeit*" lässt sich grundsätzlich nicht im *Teilchenbild* erklären: Je genauer die Photonenzahl in einem Strahl (Zustand) bekannt ist, desto unbestimmter ist die Phase des zugehörigen elektromagnetischen Feldes. Ganz abgesehen davon, dass "Teilchenstrahlen" nicht interferieren...

Und die Moral von der Geschichte? Auch annähernd instantane [Quantensprünge](#) gibt es nicht!

## Links

- [Licht im Medium](#)
- [Dispersion](#)
- [Rechteckpulse](#)
- [Form aus Kohärenz](#)
- Reflexion und Brechung mit [Laufenden ebenen Wellen und Wellenpaketen](#)
- [Fresnelsche Formeln](#)

## [Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Mathematik](#)

[Top](#)

## Dispersion

Wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) von Wellen von ihrer Frequenz abhängt, spricht man von Dispersion. Die bekannteste Erscheinung von Dispersion ist der Regenbogen: durch die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtwellen in Wasser werden verschiedene Farben beim Übergang von Luft zu Wasser (und zurück) unterschiedlich stark gebrochen.

Wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit für große Frequenzen (blau) kleiner ist als für kleine Frequenzen (rot), spricht man von "normaler Dispersion", im umgekehrten Fall von "anomaler Dispersion".

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, "Dispersionsrelationen", also den Zusammenhang von Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $f$ , zu formulieren. Die bekannteste ist  $c(f) = \lambda \cdot f$ . Wenn  $c(f) = c$  konstant ist, liegt keine Dispersion vor (z.B. Licht im Vakuum).

Für die rechnerische Untersuchung ist es bequemer, die Dispersionsrelation in der Form  $\omega = k \cdot c(k)$  zu verwenden. Darin ist  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz und  $k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl.

In realen Medien kann  $c(k)$  eine recht komplizierte Funktion sein, die überdies von vielen Parametern (Materialkonstanten und Art der Welle) abhängt. Um das Wesentliche darzustellen, werden auf dieser Seite zwei Ansätze ("mathematische Medien") gezeigt:

- [1. Näherung](#):  $c(k)$  ist eine lineare Funktion von  $k$ .
- [2. Näherung](#):  $c(k)$  ist eine quadratische Funktion von  $k$ .

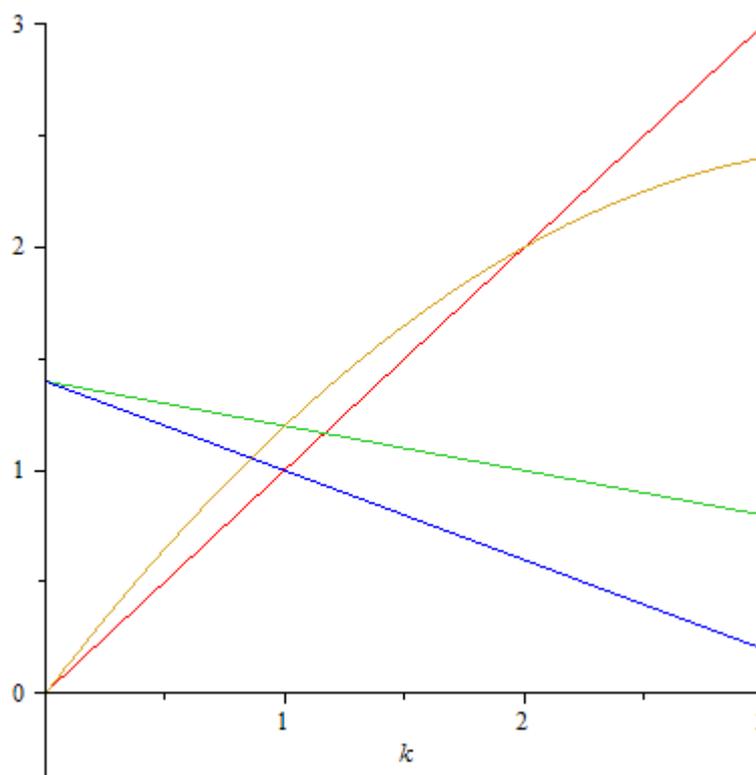
### 1. Näherung

#### Normale Dispersion:

Die **Phasengeschwindigkeit**  $c(k)$  (grün) nimmt mit der Wellenzahl  $k$  ab.

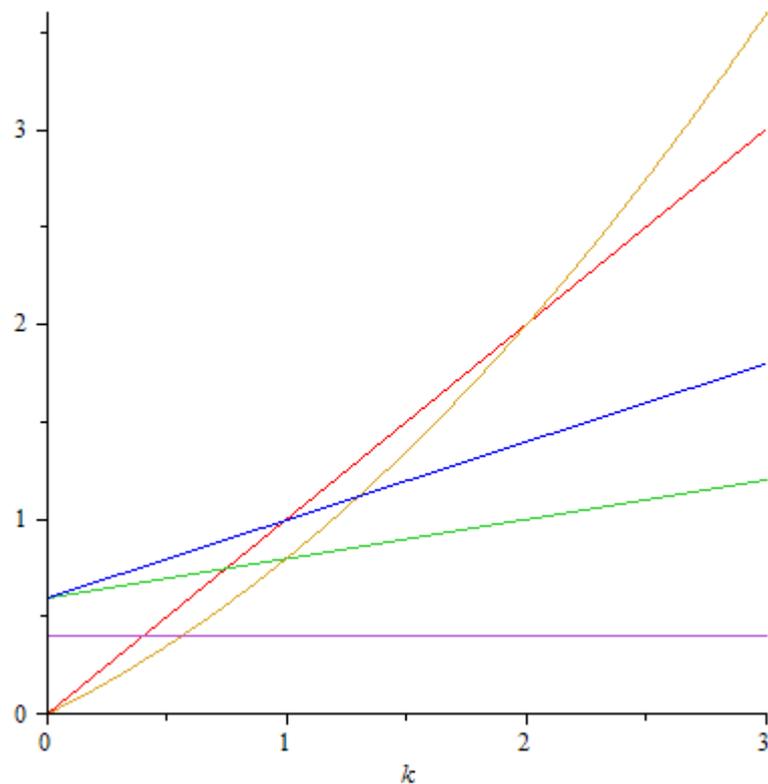
Die **Kreisfrequenz**  $\omega = k \cdot c(k)$  (goldbraun) hat eine negative Krümmung (violett) und ist nicht proportional zu  $k$  wie im **dispersionsfreien** Fall (rot).

Die **Gruppengeschwindigkeit**  $d\omega/dk$  (blau) ist kleiner als die Phasengeschwindigkeit.



Anomale Dispersion:

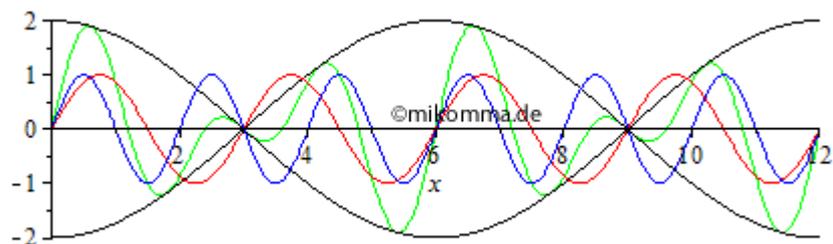
Sinngemäß. Alles klar?



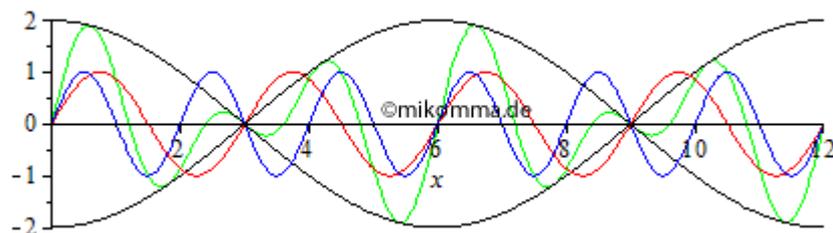
Dass sich verschiedene Wellen in verschiedenen Medien mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten, beschert uns zwar den schönen Regenbogen, ist aber ansonsten nicht weiter spannend. Lässt sich der Bogen etwas weiter spannen?

Wie wäre es mit der Überlagerung zweier Wellen unterschiedlicher Frequenz?

Ohne Dispersion läuft die blaue und die rote Welle mit der gleichen Geschwindigkeit wie ihre Überlagerung (grün). Auch die Einhüllende (schwarz) der Wellengruppe hält sich an die "Richtgeschwindigkeit". Das ist nicht gerade spannend, aber mit der Überlagerung bekommen wir zumindest eine Schwebung. Lässt sich die Spannung steigern?

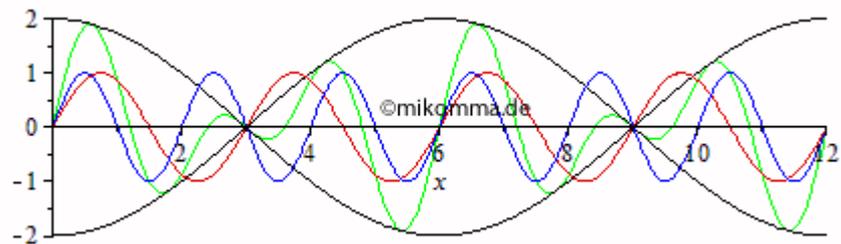
Normale Dispersion

Rot überholt grün, grün überholt blau und blau überholt schwarz (Darstellung mit gleicher Gruppengeschwindigkeit wie ohne Dispersion). Das ist doch schon etwas spannender!

Anomale Dispersion

"Sinngemäß!"

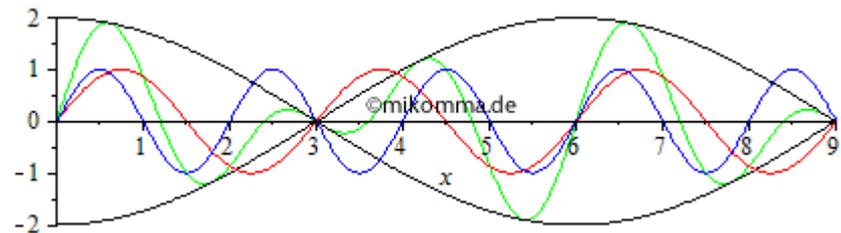
Anmerkung: Die Animationen wurden so erstellt, dass die Geschwindigkeit der resultierenden Welle (grün) in beiden Animationen gleich ist. Die Gruppengeschwindigkeit ist dann bei anomaler Dispersion doppelt so groß wie bei normaler (in diesem Beispiel).



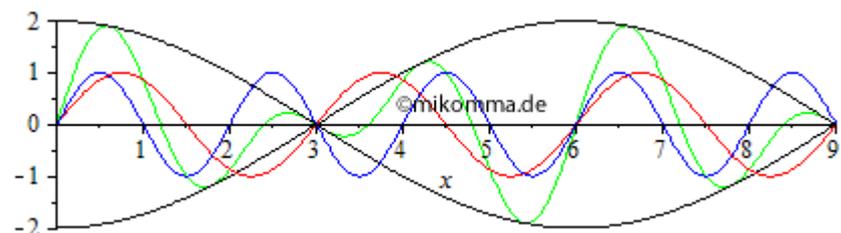
Tipp: Die Wiedergabe der Animationen hängt vom Browser und der Grafikkarte ab. Ggf. das Fenster so klein machen, dass nur zwei Animationen zu sehen sind, und die Seite neu laden.

Wenn man die Animationen so einrichtet, dass sich die Wellengruppe in beiden Fällen (normale und anomale Dispersion) mit gleicher Geschwindigkeit auf dem Bildschirm bewegt, erhält man:

Normale Dispersion



Anomale Dispersion



Wellenpakete

Überlagert man nicht nur zwei Wellen, sondern "beliebig viele", erhält man Wellenpakete.

Das Standardbeispiel ist das "Gauß-Paket", also die Überlagerung von Wellen aus einem kontinuierlichen Spektrum ( $k$ ) mit Gaußverteilung.

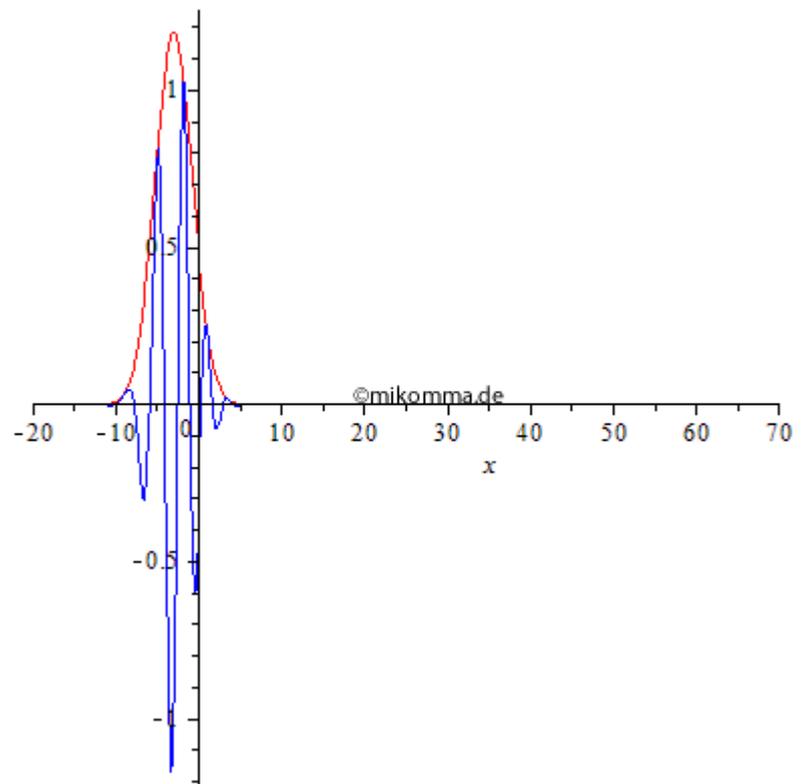
Mit der hier verwendeten Näherung ( $c \sim k$ ) ist die Einhüllende (rot) wieder ein Gauß-Paket, allerdings mit veränderlicher Breite, die zum

Zeitpunkt (hier  $t = 0$ ) minimal ist:  
das Paket zerfließt (bildet sich  
aber auch).

#### Normale Dispersion:

Die Gruppengeschwindigkeit ist  
kleiner als die (mittlere)  
Phasengeschwindigkeit der  
blauen Welle.

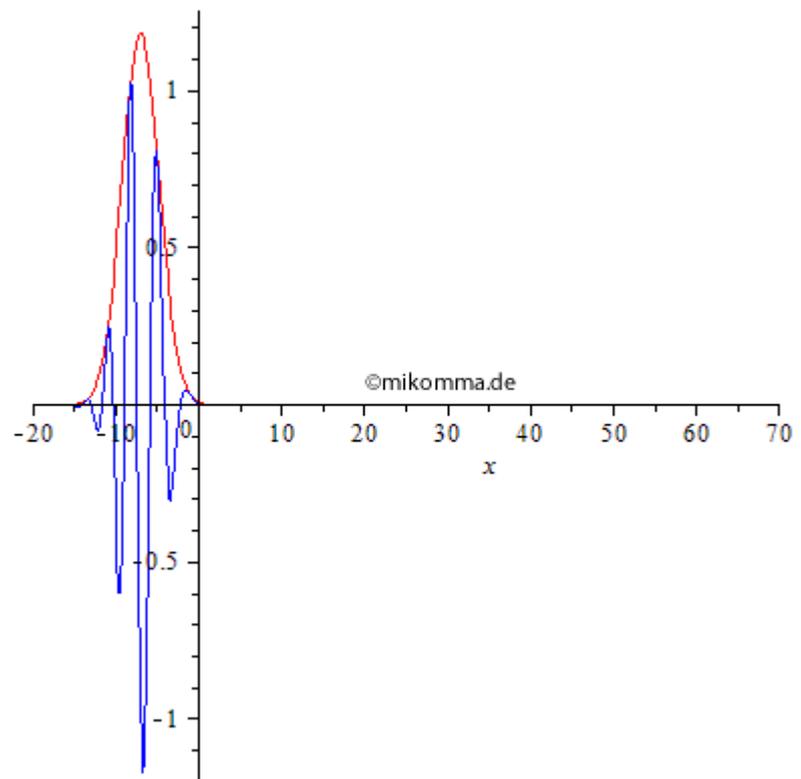
Langwellige Anteile überholen  
kurzwellige (Chirp).



#### Anomale Dispersion:

Sinngemäß...

Übrigens: so verhalten sich  
Materiewellen(pakete) auch  
schon im Vakuum, siehe  
"Moderne Physik mit Maple"  
[Wellenpakete](#).

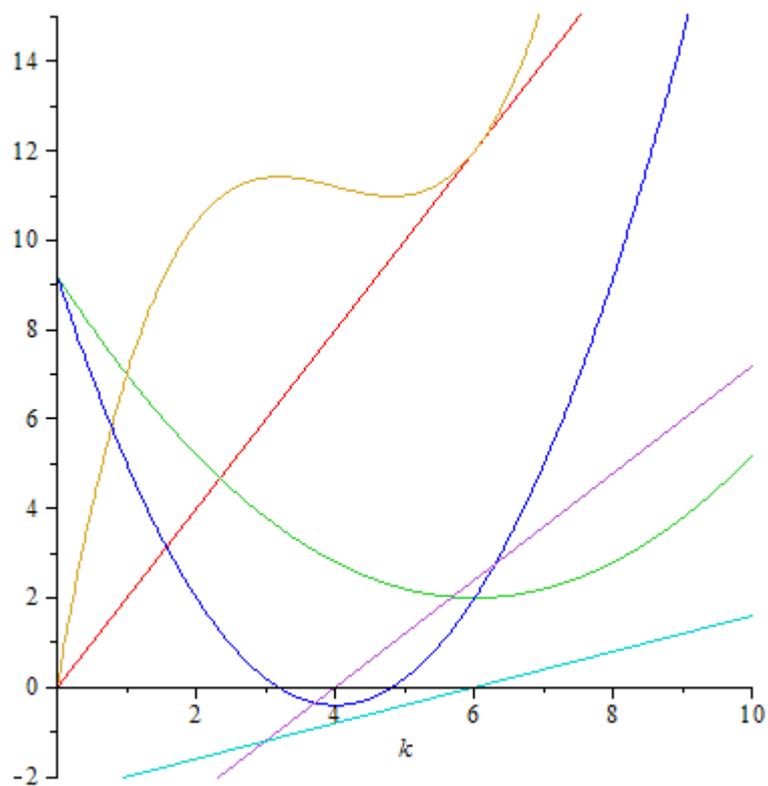


## 2. Näherung

Die **Phasengeschwindigkeit**  $c(k)$   
 $\sim k^2$  (grün) hat ein Extremum  
(Nullstelle der Geraden in türkis).

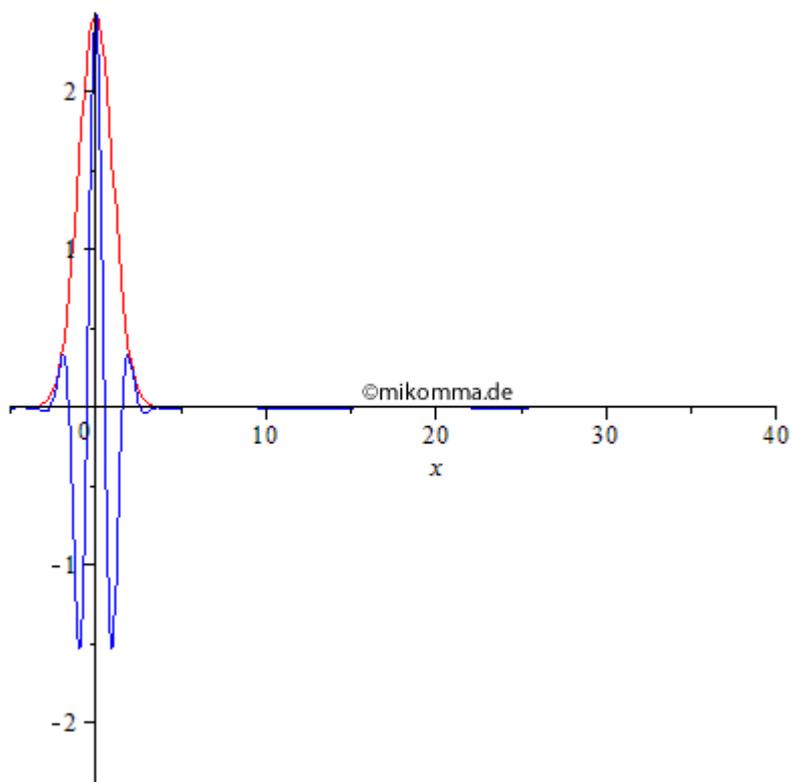
Die **Kreisfrequenz**  $\omega = k \cdot c(k)$  (goldbraun) ändert die Krümmung (violett) und ist nicht proportional zu  $k$  wie im **dispersionsfreien** Fall (rot).

Die **Gruppengeschwindigkeit** (blau) kann kleiner oder größer als die Phasengeschwindigkeit sein (und auch negativ, jedenfalls in diesem Beispiel :-).



Nun bleibt ein Gaußpaket im Wellenzahlraum kein Gaußpaket im Ortsraum.

Bei geeigneter Wahl der Parameter kann man sogar "stehende Wellenpakete" erzeugen, die allerdings mit Chirp zerfließen.



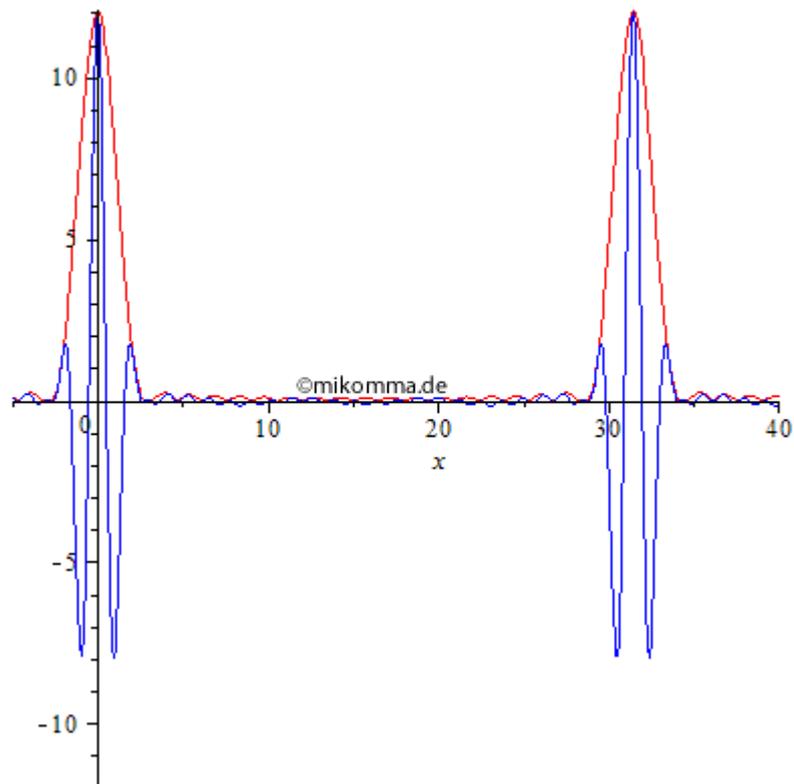
Nimmt man nicht ein kontinuierliches Spektrum, sondern ein diskretes (hier

mit äquidistanten Linien), so erhält man sogar eine Folge von Paketen.

Siehe auch [Frequenzkamm](#).

Alles nur Maple-Spielerei?

Ja - auch. Aber solche Experimente werden inzwischen mit Laserpulsen und sogar mit einzelnen Photonen gemacht!



Links:

- [Licht im Medium](#)
- [Rechteckpulse](#)
- [Form aus Kohärenz](#)
- Reflexion und Brechung mit [Laufenden ebenen Wellen und Wellenpaketen](#)
- [Fresnelsche Formeln](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

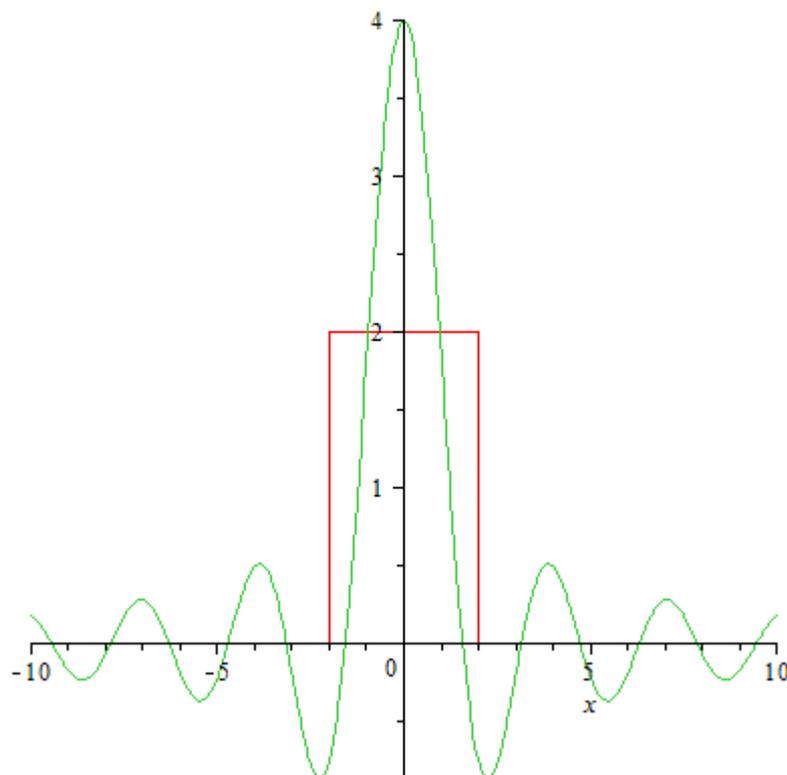
## Dispersion von Rechteckpulsen

Rechteckpulse sind eine mathematische Idealisierung. Um einen einzelnen Rechteckpuls räumlich oder zeitlich zu realisieren würde man ein kontinuierliches Spektrum unendlicher Bandbreite (Wellenzahl oder Frequenz) benötigen.

Der Zusammenhang zwischen Spektrum und Orts- oder Zeitfunktion ist immer durch die Fouriertransformation (kontinuierlich oder diskret) gegeben.

Die Fouriertransformierte einer Rechteckfunktion ist der Sinus cardinalis  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Weil das Betragsquadrat dieser Funktion das Beugungsbild eines Spalts in der Fernzone darstellt, sagt man zu Sinc auch "Spaltfunktion".

Beide Funktionen sind ohne Normierung dargestellt.



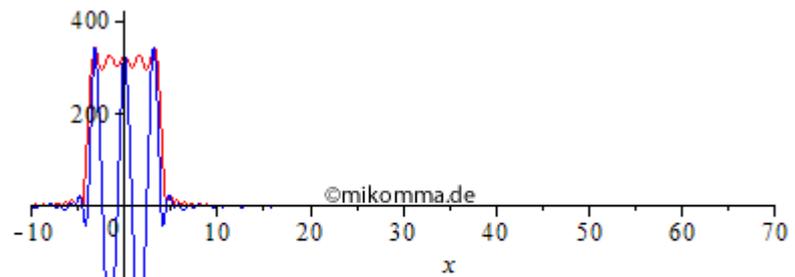
Wie verhalten sich Rechteckpulse in dispersiven Medien?

### 1. Rechteckiges Wellenpaket

Schon bei einer linearen Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl (siehe [Dispersion](#)) muss numerisch integriert werden, was im Vergleich zum Aufsummieren der Beiträge eines diskreten Spektrums die 10- bis 100-fache Rechenzeit kostet und selbst dann den Rechteckpuls nie als Rechteck darstellt, weil man immer mit einem Spektrum endlicher Breite rechnen muss. Die beiden folgenden Animationen wurden deshalb mit einem diskreten Spektrum (400 Linien) gerechnet.

#### Normale Dispersion

Die Einhüllende (rot, "Rechteck mit Restwelligkeit" zur Zeit 0 aus o.g. Gründen) zerfällt in eine Sinc-Kurve (Betrag) und bildet Vor- und Nachläufer aus.

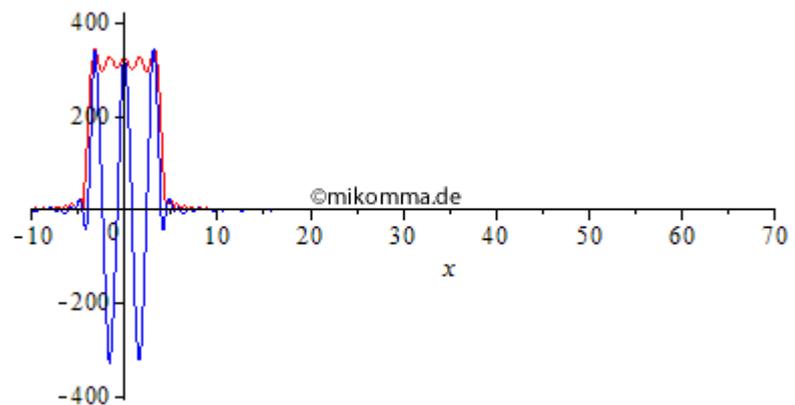


"Die Welle (blau) überholt die Gruppe (Einhüllende)", wobei Anteile mit großer Wellenlänge schneller laufen als kurzwellige.

Anomale Dispersion

"Sinngemäß!"

Anmerkung:  
Darstellungen in "geeigneten Einheiten".

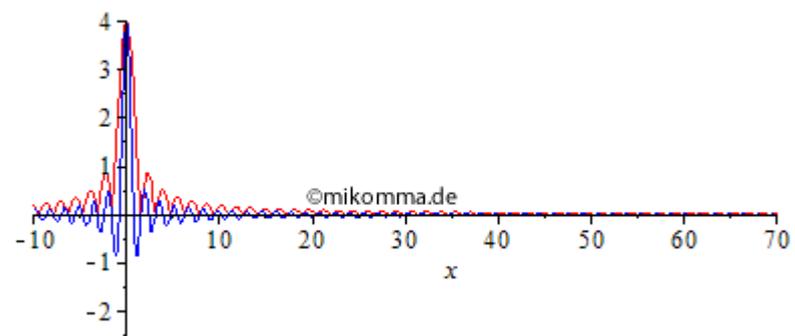


2. Rechteckiges Spektrum (Wellenzahlband)

In diesem Fall gibt es mit obigem Ansatz für die Dispersion eine "geschlossene Lösung" (Fresnelintegrale oder Fehlerfunktion), siehe "[Moderne Physik, Fourier](#)".

Normale Dispersion

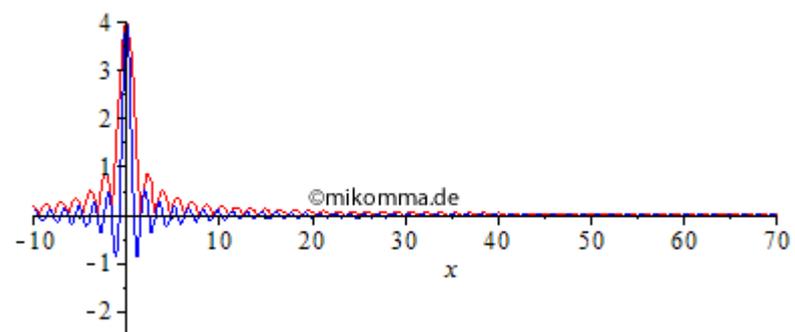
Die Sinc-Funktion mutiert zu einem Rechteck!



Anomale Dispersion

Sinngemäß!

Anmerkung:  
Darstellungen in "geeigneten Einheiten".



Die Moral von der Geschichte?

Wer Rechtecke übertragen will, scheue den Sinus cardinalis nicht!

Siehe auch:

- [Dispersion](#)
- [Moderne Physik, Fourier](#)
- [Frequenzkamm](#)
- [Licht im Medium](#)
- [Form aus Kohärenz](#)
- Reflexion und Brechung mit [Laufenden ebenen Wellen und Wellenpaketen](#)
- [Fresnelsche Formeln](#)

['Moderne Physik mit Maple'](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Moderne Physik mit Maple

PDF-Buch [Moderne Physik mit Maple](#)

Update auf Maple 14 (Juli 2010)

## Kapitel 3.3

## Worksheet wellen3.mws

c International Thomson Publishing Bonn 1995

filename: wellen3.ms

Autor: Komma

Datum: 6.11.93

Index: Wellen, Überlagerung

Thema: Form aus Kohärenz, Huygens Physik

## Form aus Kohärenz

Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, spielt die (od. eine) Wellengleichung für Wellen die gleiche Rolle wie die Newtonsche Gleichung für ein Teilchen: beides sind Bewegungsgleichungen -- als DGN formuliert. Aber es gibt einen entscheidenden Unterschied. Abgesehen davon, daß die WG nicht die Bewegung EINES Punktes beschreibt, läßt sie die lineare Superposition von Lösungen zu, was im Newtonschen Fall nur für die Schwingung möglich ist (oder ähnliche Kraftgesetze).

Diese Superpositionsfähigkeit -- und nicht die Beschreibung einer gleichförmigen Bewegung von ETWAS -- ist das entscheidende Charakteristikum des Phänomens Welle (Schwingung). Weil die Wellengleichung ohne Kraftgesetz auskommt, zählt nur das WIE der Bewegung und nicht das WAS oder WARUM. Und bei dem WIE interessiert nicht "wie schnell" und "wohin", sondern eben nur "auf welche Art". Superposition heißt: eine Welle kommt nie allein -- in Reinkultur. Selbst wenn man meint, man hätte genau eine einzige Welle vor sich, z.B. eine ebene Welle, so irrt man: diese einzige Welle läßt sich \*zerlegen\* in unendlich viele Wellen, und das auf viele verschiedene Arten. Das ist die Huygensche Physik: Wellen sind das \*Ergebnis\* von Superposition, Wellen interferieren. Wir wollen uns diesen Vorgang zunächst in der räumlichen Darstellung veranschaulichen und in einem weiteren Abschnitt auf die Details der wichtigen Sonderfälle wie Doppelspalt, Gitter und Spalt zurückkommen. Das ist typisch für das Vorgehen mit einem CAS: im Gegensatz zu herkömmlichen Methoden, die meist vom Einfachen, Elementaren zum Komplexen führen, kann mit einem CAS ein komplexer Zusammenhang direkt angegangen werden, zumindest was seine Veranschaulichung betrifft. Und dann kann weiter analysiert und zerlegt werden.

Nach Huygens kann jeder Punkt einer Wellenfront als Zentrum einer Elementarwelle aufgefaßt werden.

Wir versuchen, eine nach oben laufende Welle mit geraden Fronten zunächst mit Zentren zu erzeugen, die auf einer Geraden liegen, also z.B. durch Kreiswellen in der x-y-Ebene mit Zentren auf der x-Achse

```
> restart, with(plots)
```

```
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d,
contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d,
gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot,
listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot,
pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported,
polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata,
textplot, textplot3d, tubeplot ]
```

```
> welle := sum_{i=1}^n elem_i
```

$$welle := \sum_{i=1}^n elem_i \quad (2)$$

```
> elem_i := cos(kr_i - wt)
```

$$elem_i := \cos(kr_i - wt) \quad (3)$$

$$> r_i := \sqrt{(x - x_{0i})^2 + y^2}$$

$$r_i := \sqrt{x^2 - 2 x x_{0i} + x_{0i}^2 + y^2} \quad (4)$$

$$> n := 5$$

$$n := 5 \quad (5)$$

> for j to n do

> x0[j] := 2\*j od:

> welle

$$\begin{aligned} & \cos(k \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} - w t) + \cos(k \sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2} - w t) + \cos(k \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2} - w t) \\ & + \cos(k \sqrt{x^2 - 16x + 64 + y^2} - w t) + \cos(k \sqrt{x^2 - 20x + 100 + y^2} - w t) \end{aligned} \quad (6)$$

>

### Animation der Wellenfronten

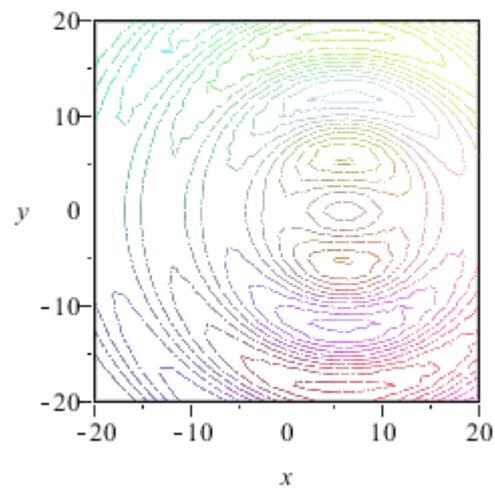
$$> w := 2; \quad k := \frac{1}{2}; \quad t := 't'$$

$$\begin{aligned} w &:= 2 \\ k &:= \frac{1}{2} \\ t &:= t \end{aligned} \quad (7)$$

> wani1 := animate3d(welle, x = -20..20, y = -20..20, t = 0.. $\frac{4\pi}{w}$ , axes = boxed, style = contour, orientation = [-90, 0], frames = 30)

$$wani1 := PLOT3D(...) \quad (8)$$

> wani1



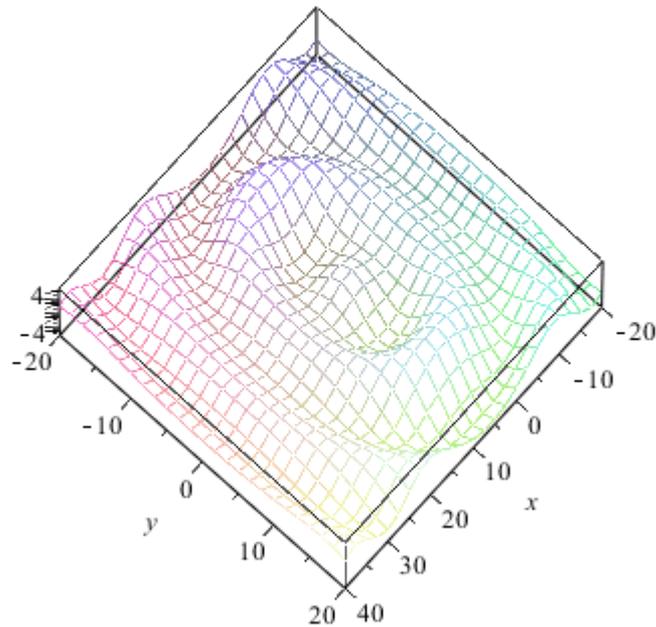
### Dreidimensionale Animation

```
> wam2 := animate3d(welle, x = -20 .. 40, y = -20 .. 20, t = 0 ..  $\frac{4\pi}{w}$ , axes = boxed, style = wireframe, frames = 20,
orientation = [42, 71])
```

```
wam2 := PLOT3D(...)
```

(9)

```
> wam2
```



Die Wellenfronten sind je nach Anzahl und Dichte der Zentren im Nahbereich "gerade" und aus großem Abstand sieht ohnehin alles wie ein Punkt aus und sendet somit Kugelwellen. Aber unsere Konstruktion hat einen Nachteil: die Welle läuft in zwei Richtungen. Man hört ja auch manchmal die Scherzfrage, ob sich Huygens nicht geirrt habe -- denn wie kann aus Wellen die in alle Richtungen laufen, eine geordnete Bewegung in eine Richtung entstehen?

Untersuchen wir also, ob sich Huygens geirrt hat. Dazu müssen wir die Anordnung unserer Zentren in die Ebene ausdehnen.

Array von regelmäßig angeordneten Zentren

> *restart, with(plots)*

*[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot ]*

(10)

>  $welle := \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n elem_{ij} \right)$

$$welle := \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n elem_{ij} \right)$$

(11)

>  $elem_{ij} := \cos(kr_{ij} - wt + ky0_{ij})$

$$elem_{ij} := \cos(kr_{ij} - wt + ky0_{ij})$$

(12)

>

$$r_{ij} := \sqrt{(x - x0_{ij})^2 + (y - y0_{ij})^2}$$

$$r_{ij} := \sqrt{x^2 - 2x x0_{ij} + x0_{ij}^2 + y^2 - 2y y0_{ij} + y0_{ij}^2} \quad (13)$$

```
> n := 5; m := 3
```

```
n := 5
```

```
m := 3
```

(14)

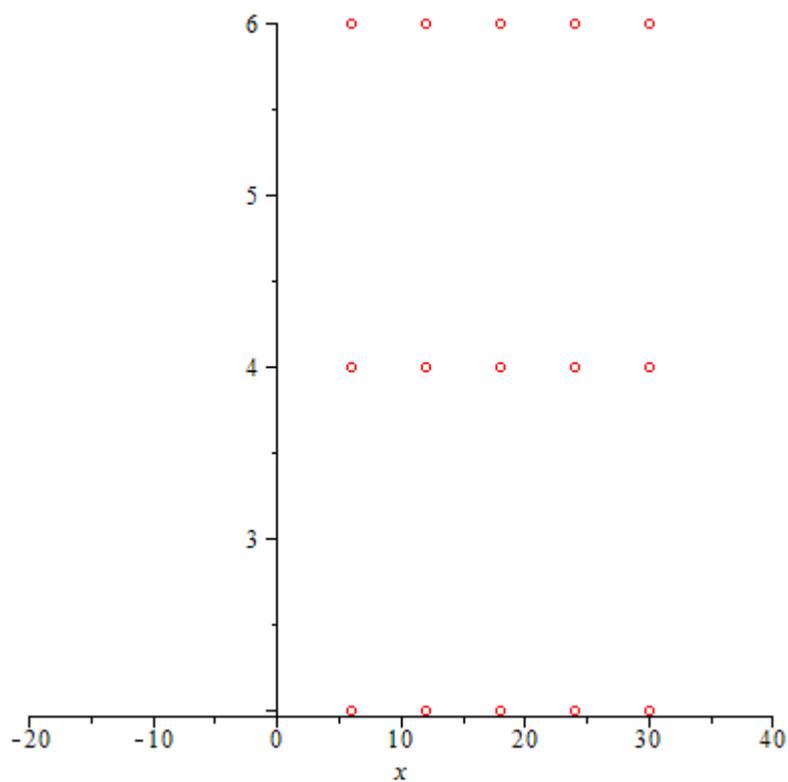
```
> for ii to n do
```

```
> for jj to m do
```

```
> x0ij := 6*ii
```

```
> y0ij := 2*jj od: od:
```

```
> plot( { seq( seq( [ x0ij, y0ij ], ii = 1..n ), jj = 1..m ), x = -20..40, style = point, color = red, symbol = circle }
```



```
winpl():
```

```
> i := 'i'; j := 'j'
```

```
i := i
j := j
```

(15)

```
> welle
```

$$\begin{aligned}
 & \cos(k\sqrt{x^2 - 12x + 40 + y^2 - 4y} - wt + 2k) + \cos(k\sqrt{x^2 - 24x + 148 + y^2 - 4y} - wt + 2k) \\
 & + \cos(k\sqrt{x^2 - 36x + 328 + y^2 - 4y} - wt + 2k) + \cos(k\sqrt{x^2 - 48x + 580 + y^2 - 4y} - wt + 2k) \\
 & + \cos(k\sqrt{x^2 - 60x + 904 + y^2 - 4y} - wt + 2k) + \cos(k\sqrt{x^2 - 12x + 52 + y^2 - 8y} - wt + 4k) \\
 & + \cos(k\sqrt{x^2 - 24x + 160 + y^2 - 8y} - wt + 4k) + \cos(k\sqrt{x^2 - 36x + 340 + y^2 - 8y} - wt + 4k) \\
 & + \cos(k\sqrt{x^2 - 48x + 592 + y^2 - 8y} - wt + 4k) + \cos(k\sqrt{x^2 - 60x + 916 + y^2 - 8y} - wt + 4k) \\
 & + \cos(k\sqrt{x^2 - 12x + 72 + y^2 - 12y} - wt + 6k) + \cos(k\sqrt{x^2 - 24x + 180 + y^2 - 12y} - wt + 6k) \\
 & + \cos(k\sqrt{x^2 - 36x + 360 + y^2 - 12y} - wt + 6k) + \cos(k\sqrt{x^2 - 48x + 612 + y^2 - 12y} - wt + 6k) \\
 & + \cos(k\sqrt{x^2 - 60x + 936 + y^2 - 12y} - wt + 6k)
 \end{aligned}$$

(16)

```
> w := 2; k := 1/2; nf := 15; t := 't'
```

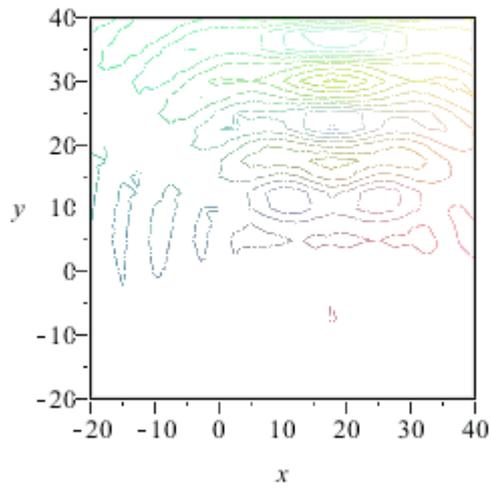
```
w := 2
k := 1/2
nf := 15
t := t
```

(17)

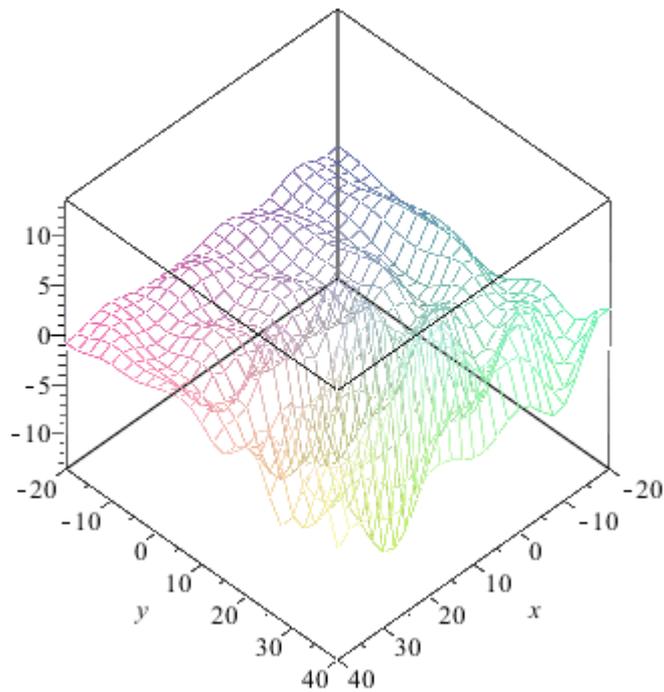
```
> wani3:=animate3d(welle,x=-20..40,y=-20..40,t=0..2*(1-1/nf)*Pi/w,axes=boxed,style=contour,
```

```
> scaling=constrained,orientation=[-90,0],frames =nf):
```

```
> wani3
```



> `animate3d(welle, x = -20..40, y = -20..40, t = 0.. $\frac{2 \left(1 - \frac{1}{nf}\right) \pi}{w}$ , axes = boxed, style = wireframe, frames = nf)`



>

Jetzt läuft schon wesentlich mehr nach oben als nach unten. Woran liegt das? An der regelmäßigen Anordnung der Zentren? Daran liegt es auch (man kann die Zentren aber auch "schlecht" anordnen, probieren Sie doch mal Ihre eigene Anordnung aus). Aber an der Anordnung der Zentren liegt es nicht in erster Linie, wie

folgender Versuch beweist:

Lage der Zentren zufallsverteilt

```
> zuf := rand(0 .. round( $\frac{2 \pi}{k}$ ))
```

```
zuf := proc ( ) proc ( ) option builtin = RandomNumberInterface; end proc (6, 14, 4) end proc (18)
```

```
> n := 5; m := 5
```

```
n := 5
m := 5 (19)
```

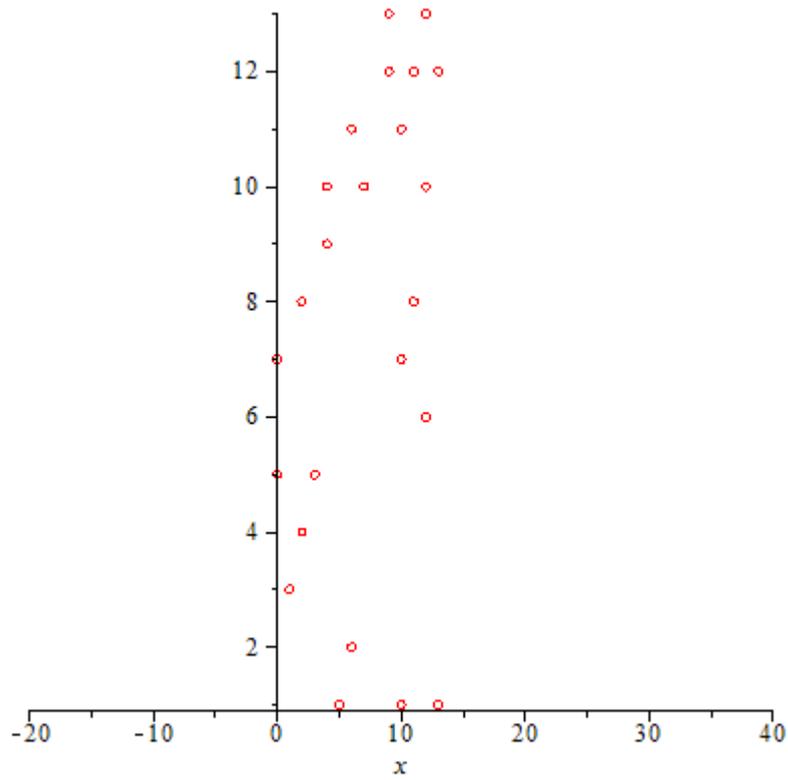
```
> for ii to n do
```

```
> for jj to m do
```

```
>  $x0_{ii,jj}$  := zuf( )
```

```
> y0[ii][jj] := zuf( ) od: od:
```

```
> plot( [ seq( seq( [  $x0_{ii,jj}$ ,  $y0_{ii,jj}$  ], ii = 1 .. n ), jj = 1 .. m ), x = -20 .. 40, style = point, color = red, symbol = circle )
```



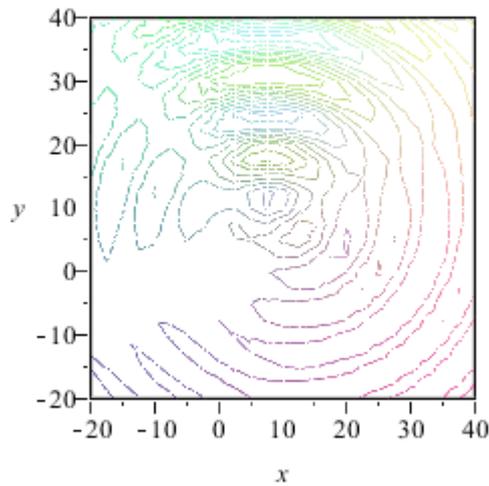
```
> w := 2; k := 1/2; nf := 15; t := 't'
```

```
w := 2
k := 1/2
nf := 15
t := t
```

(20)

```
> wam4 := animate3d(welle, x = -20..40, y = -20..40, t = 0 .. 2 * (1 - 1/nf) * pi, axes = boxed, style = contour, orientation
= [-90, 0], frames = nf);
wam4 wam4
```

```
wam4 := PLOT3D(...)
```



\*Wo\* die Zentren liegen spielt also keine entscheidende Rolle für die Form der Wellenfronten und ihre Ausbreitungsrichtung, solange es nur genügend viele Zentren sind. Es kommt vielmehr auf die "richtige" Phasenbeziehung an (die natürlich oben in die Formeln hineingesteckt wurde). Und Huygens hat also recht, wenn er sagt, daß JEDER Punkt einer Wellenfront als Zentrum einer Elementarwelle aufgefaßt werden kann. Aufgefaßt? Es \*ist\* so, daß die Phasenbeziehung und damit die Kohärenz die Form bestimmt.

Wir wollen uns das an einem eindimensionalen Schnitt in y-Richtung veranschaulichen, d.h. wir setzen nun Zentren auf die y-Achse, "steuern sie mit der richtigen Phase an", addieren die Amplituden der in beide Richtungen laufenden Wellen und verfolgen ihre Ausbreitung.

> `restart, with(plots)`

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

(21)

>  $welle := \sum_{i=1}^n elem_i$

$$welle := \sum_{i=1}^n elem_i$$

(22)

>  $elem_i := \cos(k r_i - \omega t + k y_0_i)$

$$elem_i := \cos(k r_i - \omega t + k y_0_i)$$

(23)

>  $r_i := |y - y_0_i|$

$$r_i := |y - y0_i| \quad (24)$$

```
> n := 5; k := 'k'
```

$$\begin{aligned} n &:= 5 \\ k &:= k \end{aligned} \quad (25)$$

```
> for j to n do
```

```
> y0[j] := Pi/k*j/n od:
```

```
> welle
```

$$\begin{aligned} &\cos\left(k\left|y - \frac{1}{5} \frac{\pi}{k}\right| - w t + \frac{1}{5} \pi\right) + \cos\left(k\left|y - \frac{2}{5} \frac{\pi}{k}\right| - w t + \frac{2}{5} \pi\right) - \sin\left(k\left|y - \frac{3}{5} \frac{\pi}{k}\right| - w t + \frac{1}{10} \pi\right) \\ &- \sin\left(k\left|y - \frac{4}{5} \frac{\pi}{k}\right| - w t + \frac{3}{10} \pi\right) - \cos\left(k\left|y - \frac{\pi}{k}\right| - w t\right) \end{aligned} \quad (26)$$

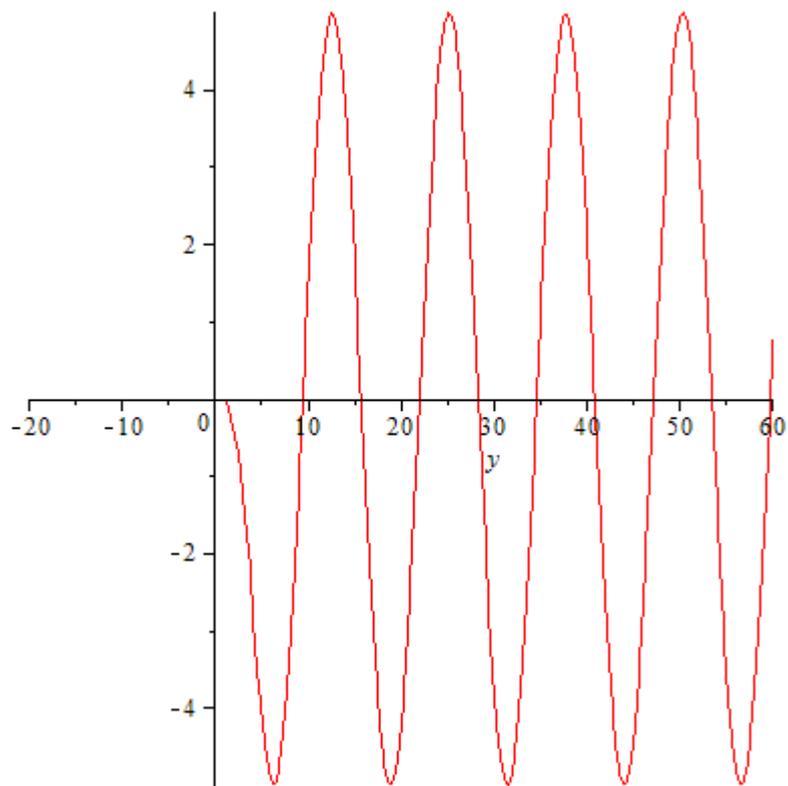
```
> w := 2; k := 1/2
```

$$\begin{aligned} w &:= 2 \\ k &:= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (27)$$

```
> t := 't'
```

$$t := t \quad (28)$$

```
> animate(welle, y = -20..60, t = 0..4*pi/w, frames = 30, color = red, numpoints = 200)
```



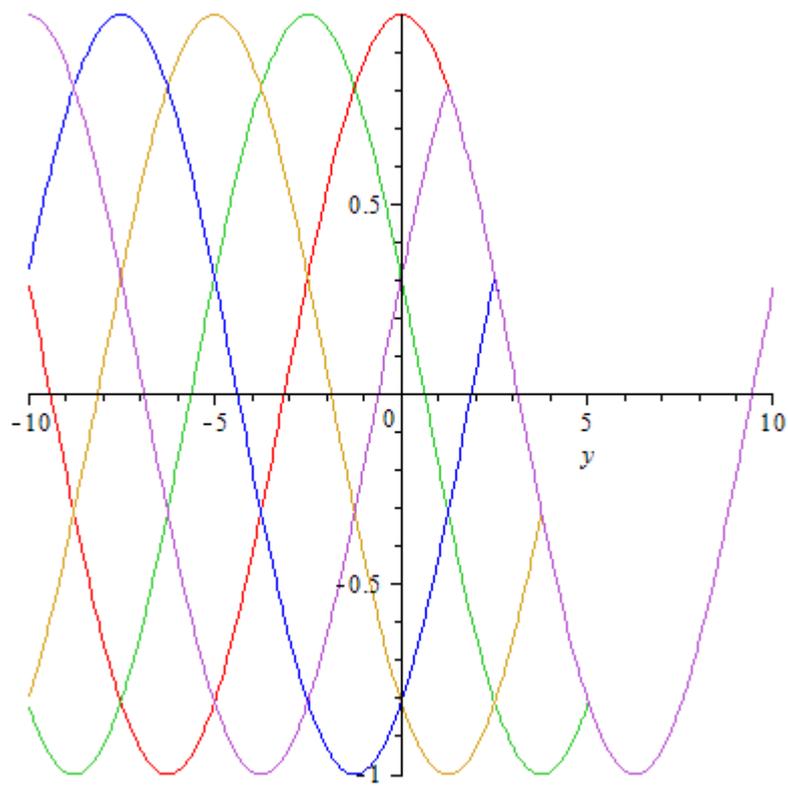
Es funktioniert! Aber wo sind die Wellen auf der negativen y-Achse geblieben? Haben wir das auch richtig programmiert? Eine Kontrolle wäre wohl angebracht:

```
> w := 2; k := 1/2; t := 0
```

```
w := 2
k := 1/2
t := 0
```

(29)

```
> plot( {seq( eval( subs( i=j, elem_i ) ), j=1..n ) }, y = -10..10)
```

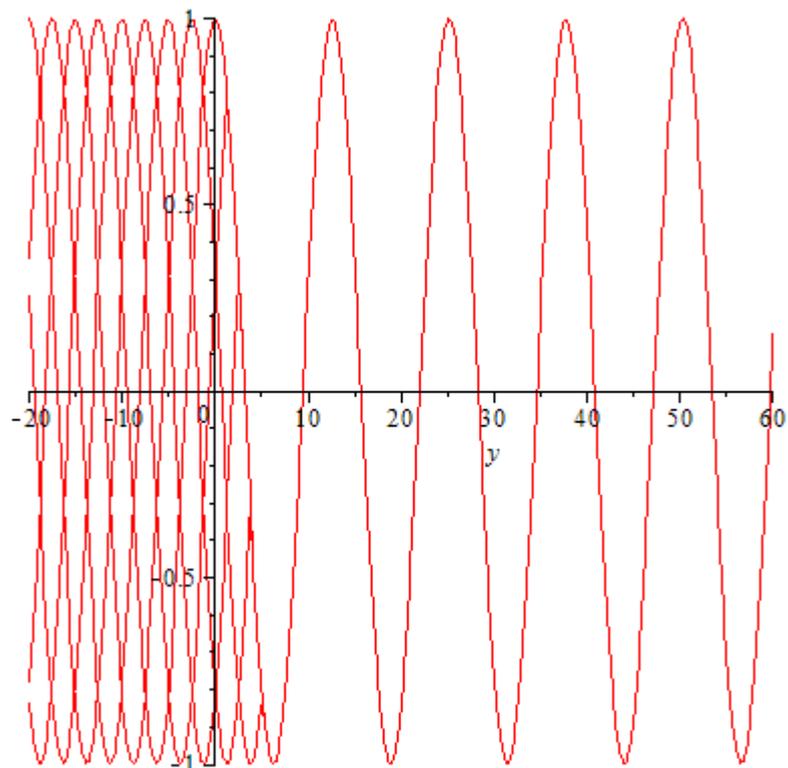


> t := 't'

t := t

(30)

> animate ( seq ( eval ( subs ( i = j, elem\_i ) ), j = 1 .. n ), y = -20 .. 60, t = 0 ..  $\frac{4\pi}{w}$ , numpoints = 200 )



Alle Elementarwellen sind da! Aber die nach links laufenden können sich nicht einigen und löschen sich gegenseitig aus: Wellensalat! Studieren Sie auch das Übergangsgebiet, also das Gebiet, in das Sie Zentren setzen (was kann man alles ändern?).

Man kann den Sachverhalt "Verstärkung in Vorwärtsrichtung -- Auslöschung in Rückwärtsrichtung" auch noch etwas anders darstellen, allerdings etwas abstrakter, indem man sich die Phasen der Elementarwellen über dem Ort darstellen läßt.

>  $k := 'k'$

$$k := k \quad (31)$$

>  $\phi_i := k |y - y0_i| + k y0_i$

$$\phi_i := k |y - y0_i| + k y0_i \quad (32)$$

>  $zuf := rand(1..10); n := 5$

$$\begin{aligned} zuf := \text{proc} ( ) \text{proc} ( ) \text{option builtin} = \text{RandomNumberInterface}; \text{end proc} (6, 10, 4) + 1 \text{end proc} \\ n := 5 \end{aligned} \quad (33)$$

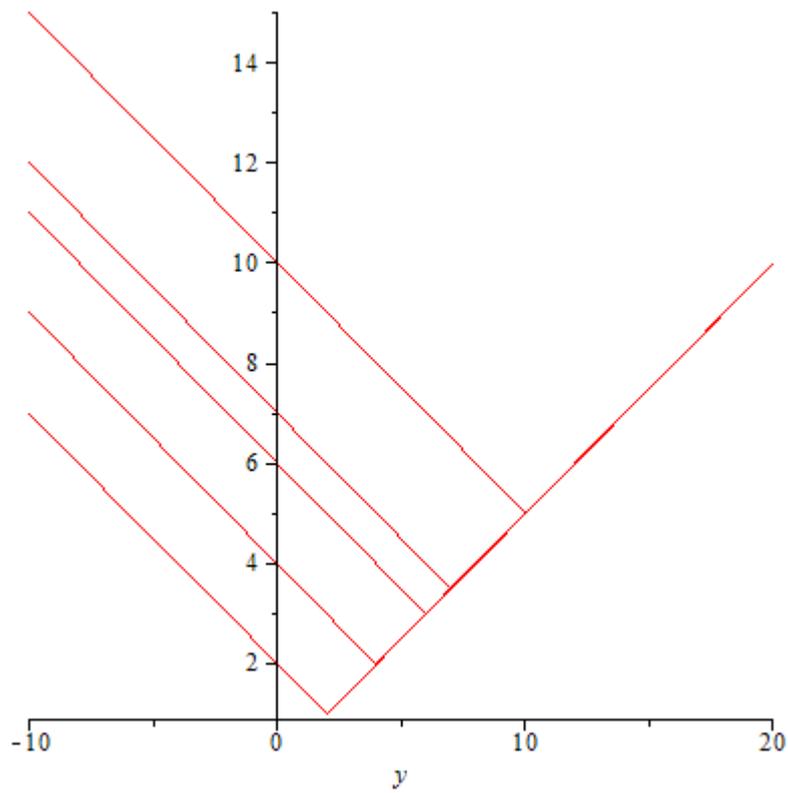
> **for**  $i$  **to**  $n$  **do**  $y0_{ii} := zuf( )$  **end do**

$$\begin{aligned} y0_1 &:= 7 \\ y0_2 &:= 10 \\ y0_3 &:= 6 \\ y0_4 &:= 2 \\ y0_5 &:= 4 \end{aligned} \quad (34)$$

>  $k := \frac{1}{2}$

$$k := \frac{1}{2} \quad (35)$$

>  $\text{plot}(\{seq(subs(i=j, \phi_i), j=1..n)\}, y = -10..20, color = red)$



Für inkohärente Elementarwellen hätte man dagegen

$$> \phi_i := k |y - y_0_i| + \phi_0_i$$

$$\phi_i := \frac{1}{2} |y - y_0_i| + \phi_0_i \quad (36)$$

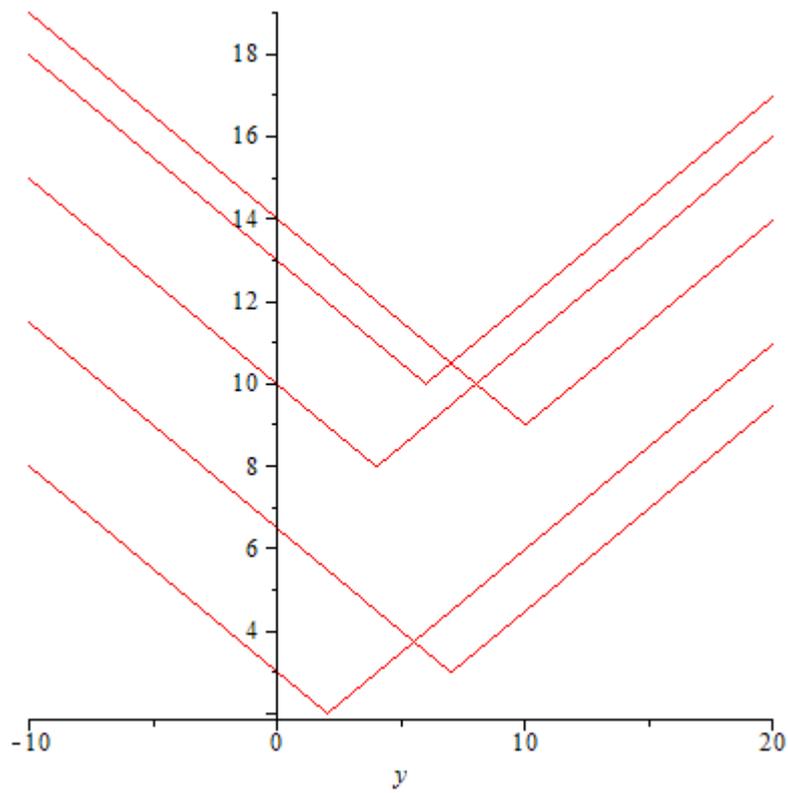
> **for**  $i$  **to**  $n$  **do**  $\phi_{0_{ii}} := zuf( )$  **end do**

$$\begin{aligned} \phi_{0_1} &:= 3 \\ \phi_{0_2} &:= 9 \\ \phi_{0_3} &:= 10 \\ \phi_{0_4} &:= 2 \\ \phi_{0_5} &:= 8 \end{aligned}$$

(37)

Die "Charakteristiken" wären beliebig verteilt

>  $plot(\{seq(subs(i=j, \phi_i), j=1..n)\}, y=-10..20, color=red)$



&gt;

$$welle := \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - w t)$$

$$welle := \cos\left(-\frac{1}{2}|y-7|-3+2t\right) + \cos\left(-\frac{1}{2}|y-10|-9+2t\right) + \cos\left(-\frac{1}{2}|y-6|-10+2t\right) + \cos\left(-\frac{1}{2}|y-2|-2+2t\right) + \cos\left(-\frac{1}{2}|y-4|-8+2t\right) \quad (38)$$

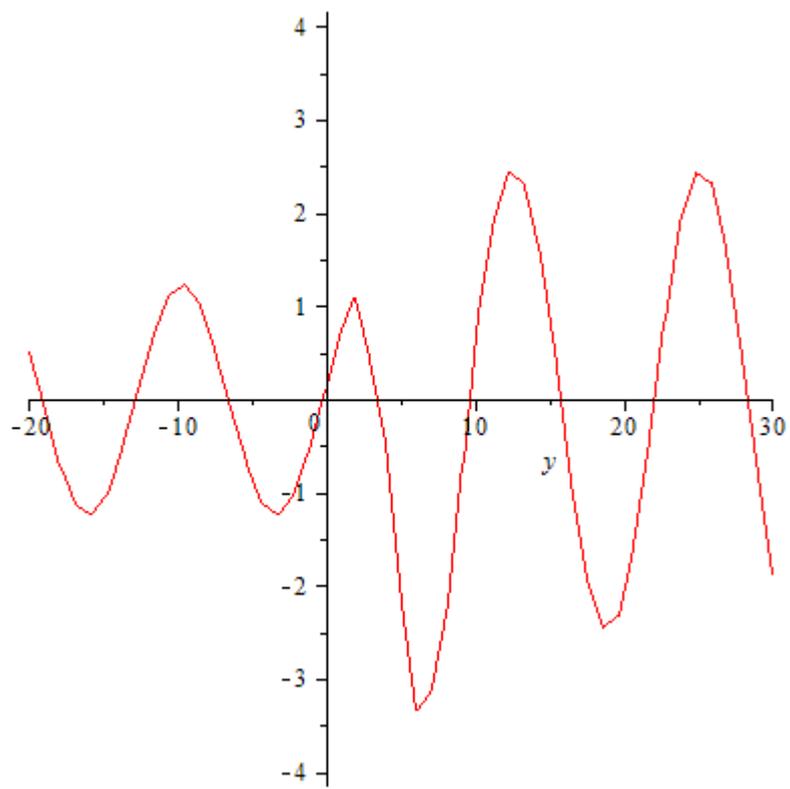
Und eine geordnete Bewegung könnte nur zufällig zustandekommen

>  $w := 2; t := 't'$

$w := 2$   
 $t := t$

(39)

>  $animate(welle, y = -20..30, t = 0.. \frac{4\pi}{w}, frames = 30)$



[Home](#)

[komma\(AT\)oe.uni-tuebingen.de](mailto:komma(AT)oe.uni-tuebingen.de)

## Vielstrahlinterferenz

Interaktives Maple Worksheet

© Dr. M. Komma 10/2010

Interferenz von  $n$  Strahlen, die von der Quelle  $Q(x_q | y_q)$  ausgehen und sich hinter der Blende mit der Breite  $b$  (mit äquidistant verteilten Elementarzentren) im Ziel  $Z(x_z | y_z)$  treffen.

Die resultierende Amplitude (gelber Pfeil) ergibt sich aus der vektoriellen Addition der einzelnen Amplituden.

The interactive worksheet displays a 2D coordinate system with axes ranging from -10 to 30 on the x-axis and -20 to 20 on the y-axis. A source point  $Q$  is located at approximately  $(10, 5)$  and a target point  $Z$  is at approximately  $(20, 10)$ . A yellow arrow represents the resulting amplitude vector from  $Q$  to  $Z$ . Below the plot are several sliders for parameters:  $y_z$  (range -25 to 25),  $\lambda$  (range -1.0 to 4.0),  $b/2$  (range 0.0 to 6.0),  $n$  (range 0 to 40),  $y_q$  (range -25 to 25),  $x_z$  (range 0 to 100), and  $x_q$  (range -100 to 0). A 'Reset' button is located at the bottom. To the right, a diagram of a lens is shown with a horizontal axis from -10 to 10 and a vertical axis from -3 to 3.

Randstrahlen (man beachte den unterschiedlichen Maßstab auf den Achsen).

Siehe auch:

- [Fresnelbeugung](#)
- [Zeiger](#)

Download:

- Für die Ausführung des Worksheets ist das Programm [Maple](#) erforderlich.
- Maple-Dokumente haben das Format `.xml`, wenn also beim Öffnen eine `.xml`-Datei angezeigt wird, haben Sie Maple nicht installiert oder:
  - Wenn Maple installiert ist, aber die Datei nicht mit Maple geöffnet wird:  
Datei speichern (mit `*.mw`) und dann mit Maple öffnen.
- Download [Interaktives Maple Worksheet](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

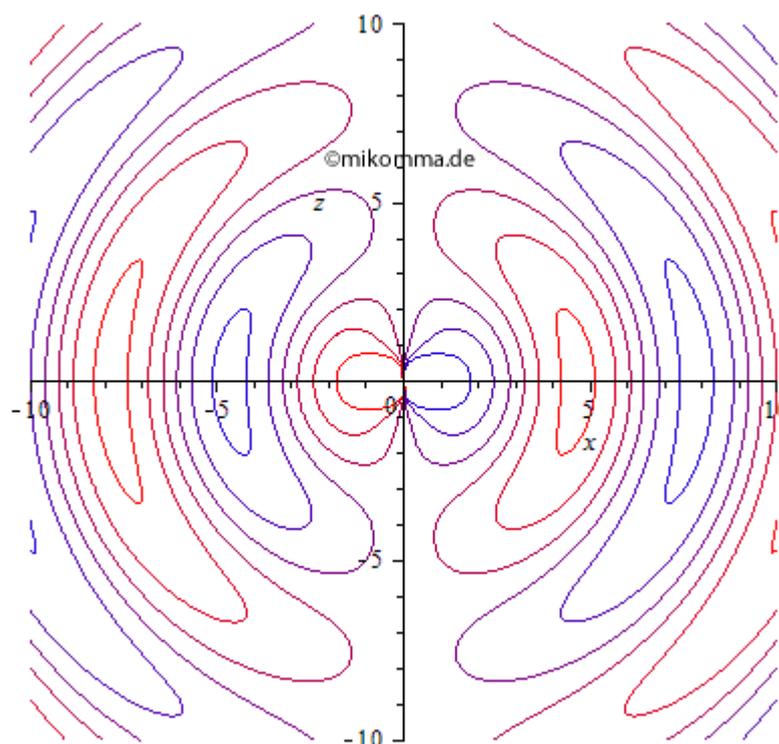
[Quantenphysik](#)

[Top](#)

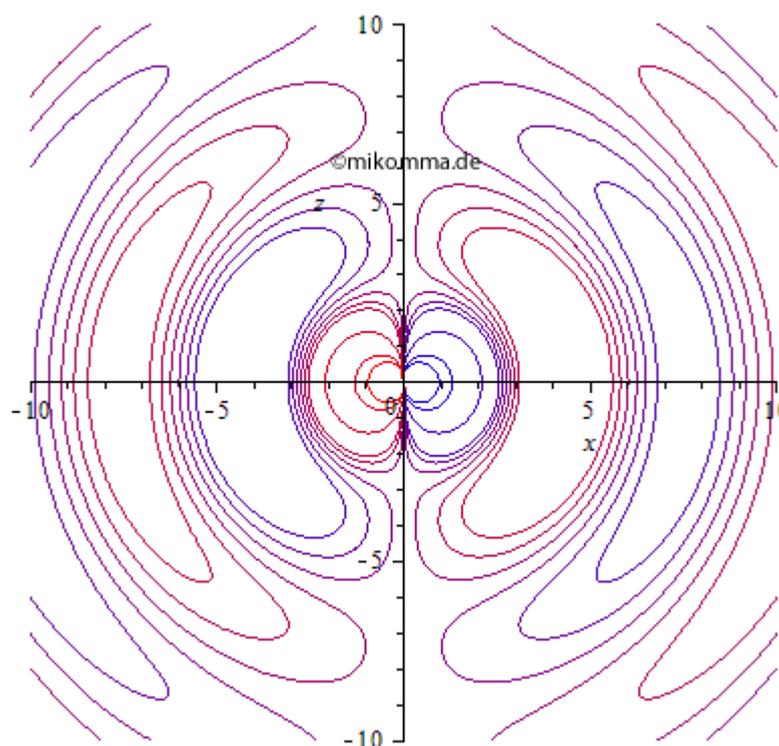
## Hertzscher Dipol

## Ergänzungen

Es ist nicht ganz einfach, die Feldlinien "korrekt" darzustellen, weil die Feldstärken im Ursprung unendlich groß werden. In nebenstehender Animation wurde deshalb die Singularität im Ursprung künstlich abgeschwächt (statt  $1/r$   $1/\sqrt{r}$ ). Dadurch erreicht man zwar einen kontinuierlichen Übergang von der Nah- in die Fernzone bei gleicher Skalierung für die Feldlinien, es "gehen aber Feldlinien verloren" (in der Nahzone).



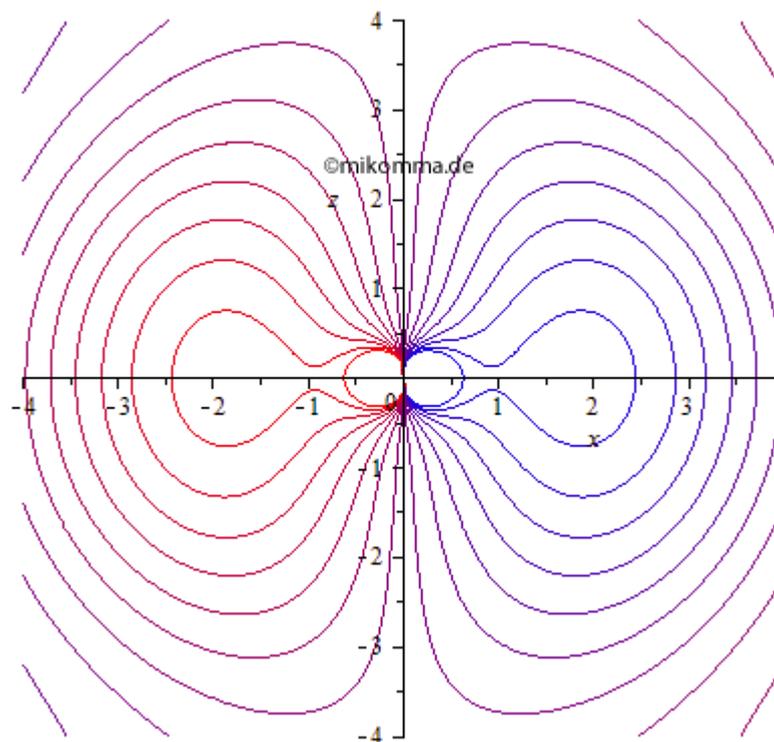
Eine andere Möglichkeit besteht darin, in der Nahzone eine andere Skalierung für die Feldlinien zu wählen. Dann kann man aber das Ablösen der Feldlinien vom Dipol weniger gut verfolgen.



Oder man

verzichtet auf die gemeinsame Darstellung von Nah- und Fernzone:  
Nebenstehend ist die Nahzone dargestellt und zwar symmetrisch zum Zeitpunkt, in dem der Dipol nicht geladen ist (der Film springt zurück). Auch hier muss man sich aber "beliebig viele Feldlinien" in den inneren weißen Flächen dazu denken.

Zur Farbgebung: Blaue und rote Feldlinien haben (in den Wirbeln) entgegengesetzten Drehsinn - sinngemäß für die nicht abgelösten Feldlinien am Dipol.



[zurück zur Übersicht](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

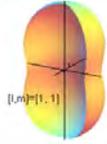
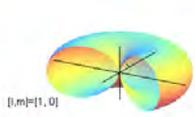
[Mathematik](#)

[Top](#)

Multipolstrahlung

Ein elektromagnetischer Multipol strahlt so Leistung in ein Raumwinkelement ab:

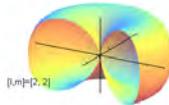
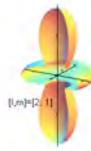
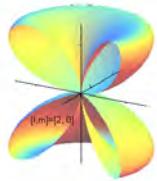
$$P := (l, m, \theta, \phi) \rightarrow c \left( \frac{1}{2} (l - m) (l + m + 1) \operatorname{evalc}(|Y(l, 1 + m, \theta, \phi)|^2) + \frac{1}{2} (l + m) (l - m + 1) \operatorname{evalc}(|Y(l, m - 1, \theta, \phi)|^2) + m^2 \operatorname{evalc}(|Y(l, m, \theta, \phi)|^2) \right)$$



Dipol  
[Interaktiv](#)

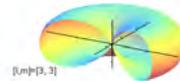
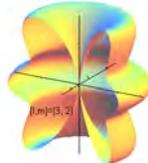
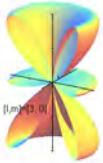
Zeile: m  
Spalte: l

Natürlich ist es nicht verboten, die Bilder abzuspeichern und zu vergrößern.

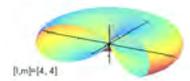
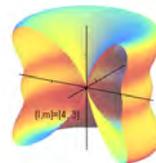
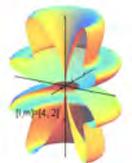
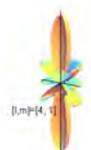


Quadrupol

[Natürlich ist es nicht verboten, die Bilder abzuspeichern und zu vergrößern, oder sie zu verbessern.](#)



Multipol...



[Interaktiv](#) (hier können Sie die Bilder einzeln darstellen und interaktiv bearbeiten - aber bitte das Copyright nicht vergessen :-))

Verwandte Themen:

[H-Orbitals](#)

[Quantensprung](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

## Darstellung des elektrischen Feldes zweier Punktladungen

## Potential

> restart:with(plots):

> V:=Q1/r1+Q2/r2;

$$V := \frac{Q1}{r1} + \frac{Q2}{r2}$$

Die Ladungen befinden sich in  $x_0$  und  $-x_0$ . (Der Parameter  $a$  dient zur Unterdrückung der Divergenz bei der Darstellung der Feldvektoren.)

> r1:=sqrt((x-x0)^2+y^2)+a;

$$r1 := \sqrt{x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a$$

> r2:=sqrt((x+x0)^2+y^2)+a;

$$r2 := \sqrt{x^2 + 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a$$

> V;

$$\frac{Q1}{\sqrt{x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a} + \frac{Q2}{\sqrt{x^2 + 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a}$$

## Feldstärke

> Ey:=-diff(V,y);

$$E_y := \frac{Q1 y}{(\sqrt{x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a)^2 \sqrt{x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2}} + \frac{Q2 y}{(\sqrt{x^2 + 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a)^2 \sqrt{x^2 + 2x x_0 + x_0^2 + y^2}}$$

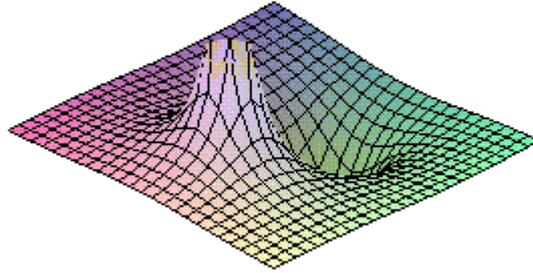
> Ex:=-diff(V,x);

$$E_x := \frac{1}{2} \frac{Q1 (2x - 2x_0)}{(\sqrt{x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a)^2 \sqrt{x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2}} + \frac{1}{2} \frac{Q2 (2x + 2x_0)}{(\sqrt{x^2 + 2x x_0 + x_0^2 + y^2} + a)^2 \sqrt{x^2 + 2x x_0 + x_0^2 + y^2}}$$

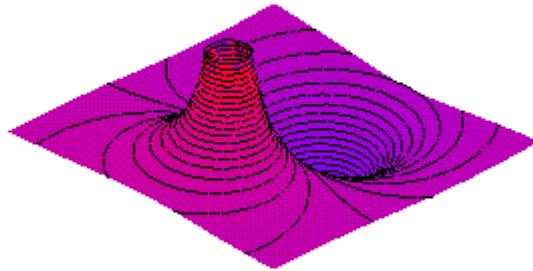
Darstellung des Potentials:

> x0:=1:Q1:=1:Q2:=-1.5: a:=0:

```
> pot:=plot3d(V,x=-3..3,y=-3..3,view=-2..2):pot;
```



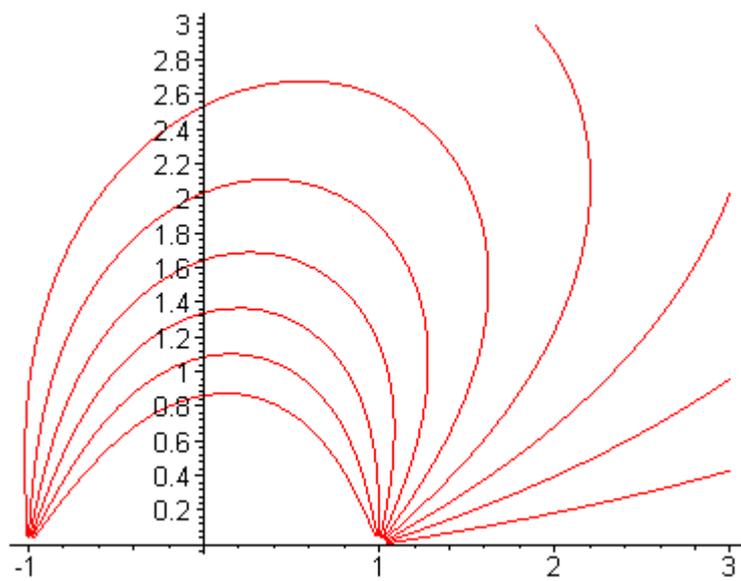
```
> cpot:=plot3d(V,x=-3..3,y=-3..3,view=-2..2,style=patchcontour,contours=40,shading=z,grid=[40,40]):cpot;
```



>

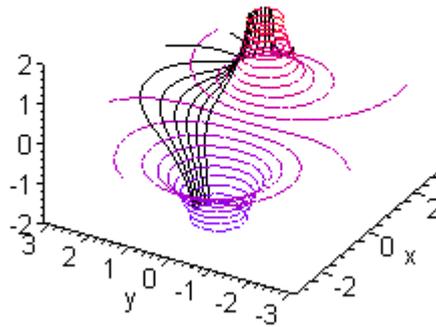
2D-Darstellung einiger Feldlinien

```
> linie2d:=plot({seq([liste.i],i=1..n3)},color=red):linie2d;
```

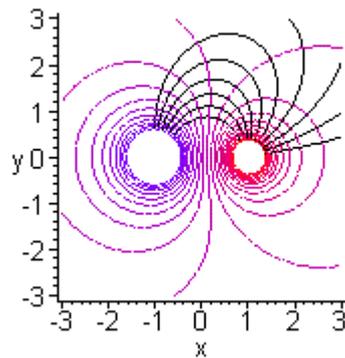


Feldlinien und Äquipotentiallinien

> `display({linie3d,c},scaling=constrained,axes=framed,orientation=[-150,60]);`



> `display({linie3d,c},scaling=constrained,axes=framed,orientation=[-90,0]);`



Weitere Optionen im [Worksheet](#) (MapleV,5).

[Bahn einer Ladung im Dipolfeld](#)

komma@oe.uni-tuebingen.de

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern

Aus 'Moderne Physik mit Maple'

c International Thomson Publishing Bonn 1995 filename: newton2.ms

Autor: Komma Datum: 1.5.94

Thema: Newtons Physik, Teilchen in Feldern

Ein Beispiel zur geschlossenen Lösung der Bewegungsgleichung: Ein geladenes Teilchen bewegt sich in kombinierten zeitlich konstanten und homogenen E- und B-Feldern.

Newtons Maschine ist nicht zu stoppen!

```
> restart;with(linalg):with(student):with(plots):
```

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace

```
> r:=vector([x(t),y(t),z(t)]);
```

$$r := [x(t), y(t), z(t)]$$

```
> v:=map(diff,r,t);
```

$$v := \left[ \frac{\partial}{\partial t} x(t), \frac{\partial}{\partial t} y(t), \frac{\partial}{\partial t} z(t) \right]$$

```
> a:=map(diff,v,t);
```

$$a := \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t), \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t), \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(t) \right]$$

Definition der Felder:

```
> E:=vector([Ex,Ey,Ez]);
```

$$E := [E_x, E_y, E_z]$$

```
> B:=vector([Bx,By,Bz]);
```

$$B := [B_x, B_y, B_z]$$

Lorentzkraft:

```
> F:=q*(E+crossprod(v,B));
```

$$F := q \left( E_l + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) B_z - \left( \frac{\partial}{\partial t} z(t) \right) B_y, \left( \frac{\partial}{\partial t} z(t) \right) B_x - \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) B_z, \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) B_y - \left( \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) B_x \right] \right)$$

> evalm(%);

$$\left[ q \left( E_x + \left( \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) B_z - \left( \frac{\partial}{\partial t} z(t) \right) B_y \right), q \left( E_y + \left( \frac{\partial}{\partial t} z(t) \right) B_x - \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) B_z \right), q \left( E_z + \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) B_y - \left( \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) B_x \right) \right]$$

Bewegungsgleichung:

> sys:=equate(m\*a,F);

$$\text{sys} := \left\{ m \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) \right) = q \left( E_x + \left( \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) B_z - \left( \frac{\partial}{\partial t} z(t) \right) B_y \right), m \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) \right) = q \left( E_y + \left( \frac{\partial}{\partial t} z(t) \right) B_x - \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) B_z \right), m \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(t) \right) = q \left( E_z + \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) B_y - \left( \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) B_x \right) \right\}$$

Lösung: (Bitte warten ...)

> sol:=dsolve(sys,{x(t),y(t),z(t)},method=laplace):

> assign(sol);

> xx:=makeproc(x(t),t): yy:=makeproc(y(t),t): zz:=makeproc(z(t),t):

> #xx(t);

Lösungsfunktion (da lacht das Herz des theoretischen Physikers, aber es wäre eine Aufgabe für sich, mit einem CAS und Termmanipulation die relevanten Terme herauszuschälen - siehe Jackson).

> rf:=makeproc(map(eval,r),t): vf:=makeproc(map(eval,v),t): af:=makeproc(map(eval,a),t):

B-Feld in z-Richtung (zur besseren Übersicht):

> Bx:=0:By:=0:

> rf(ZEIT);

$$\left[ \left( m x(0) + \frac{m^2 E_x}{q B_z^2} + \frac{m^2 D(y)(0)}{q B_z} - \frac{m^2 E_y \sin\left(\frac{\sqrt{q^2 B_z^2 ZEIT}}{m}\right)}{B_z \sqrt{q^2 B_z^2}} - \frac{m^2 E_x \cos\left(\frac{\sqrt{q^2 B_z^2 ZEIT}}{m}\right)}{q B_z^2} + \frac{m ZEIT E_y}{B_z} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m^2 D(x)(0) \sin\left(\frac{\sqrt{q^2 B_z^2 ZEIT}}{m}\right) - m^2 D(y)(0) \cos\left(\frac{\sqrt{q^2 B_z^2 ZEIT}}{m}\right)}{q B_z} \right) / m, \left( m y(0) + \frac{m^2 E_y}{q B_z^2} - \frac{m^2 D(x)(0)}{q B_z} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m^2 E_x \sin\left(\frac{\sqrt{q^2 B_z^2 ZEIT}}{m}\right)}{B_z \sqrt{q^2 B_z^2}} + \frac{m^2 D(y)(0) \sin\left(\frac{\sqrt{q^2 B_z^2 ZEIT}}{m}\right)}{\sqrt{q^2 B_z^2}} - \frac{m^2 E_y \cos\left(\frac{\sqrt{q^2 B_z^2 ZEIT}}{m}\right)}{q B_z^2} - \frac{m ZEIT E_x}{B_z} \right)$$

$$\left[ \frac{m^2 D(x)(0) \cos\left(\frac{\sqrt{q^2 Bz^2 ZEIT}}{m}\right)}{q Bz} / m, \frac{m z(0) + \frac{1}{2} q ZEIT^2 Ez + m ZEIT D(z)(0)}{m} \right]$$

Namensgebung:

>  $x(0) := 'x0'$ ;  $D(x)(0) := 'vx0'$ ;  $y(0) := 'y0'$ ;  $D(y)(0) := 'vy0'$ ;  $z(0) := 'z0'$ ;  $D(z)(0) := 'vz0'$ ;

$$D(z)(0) := vz0$$

elektrische Feldstärke:

>  $Ex := 0$ ;  $Ey := -5$ ;  $Ez := 1/10$ ;  $rf(ZEIT)$ ;

$$\left[ \left( m x0 + \frac{m^2 vy0}{q Bz} - \frac{m^2 vy0 \cos\left(\frac{\sqrt{q^2 Bz^2 ZEIT}}{m}\right)}{q Bz} + \frac{m^2 vx0 \sin\left(\frac{\sqrt{q^2 Bz^2 ZEIT}}{m}\right)}{\sqrt{q^2 Bz^2}} - 5 \frac{m ZEIT}{Bz} \right. \right. \\ \left. \left. + 5 \frac{m^2 \sin\left(\frac{\sqrt{q^2 Bz^2 ZEIT}}{m}\right)}{Bz \sqrt{q^2 Bz^2}} \right) / m, \left( m y0 + \frac{m^2 vy0 \sin\left(\frac{\sqrt{q^2 Bz^2 ZEIT}}{m}\right)}{\sqrt{q^2 Bz^2}} + \frac{m^2 vx0 \cos\left(\frac{\sqrt{q^2 Bz^2 ZEIT}}{m}\right)}{q Bz} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{m^2 vx0}{q Bz} - 5 \frac{m^2}{q Bz^2} + 5 \frac{m^2 \cos\left(\frac{\sqrt{q^2 Bz^2 ZEIT}}{m}\right)}{q Bz^2} \right) / m, \frac{\frac{1}{20} q ZEIT^2 + m ZEIT vz0 + m z0}{m} \right]$$

Anfangswerte und Konstanten:

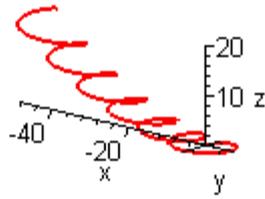
>  $x0 := 0$ ;  $vx0 := 0$ ;  $y0 := 0$ ;  $vy0 := 10$ ;  $z0 := 0$ ;  $vz0 := 0$ ;

>  $q := 1$ ;  $m := 1$ ;  $Bz := 2$ ;

Jetzt geht's los!

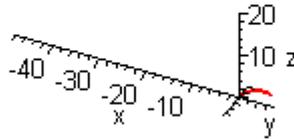
>  $myoptions := axes = normal, labels = ['x', 'y', 'z'], orientation = [-48, 75], scaling = constrained, numpoints = 400$ ;

>  $spacecurve(rf(t), t = 0..20, myoptions, color = red, thickness = 2)$ ;



Aber wer gibt sich schon mit so einem einfachen statischen Bild zufrieden?

```
> display([seq(spacecurve(rf(t),t=0..i,color=red,thickness=2),i=1..20)],insequence=true,myoptions);
```



Und schon sind wir mitten in der Elektrodynamik / Magnetohydrodynamik / Relativitätstheorie. Ein Versehen? Nein, das passiert nun einmal, wenn man mit diesen Maschinen arbeitet wie von selbst. Newtons Maschine und die Maple-Maschine verleiten zu einer tour d'horizon durch die Physik. Mit diesem Werkzeug (Maple) kann man das Experiment am Computer durchführen und so "mit Formeln forschen" ... wenn man sie hat und versteht.

>

[komma@oe.uni-tuebingen.de](mailto:komma@oe.uni-tuebingen.de)

[HOME](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Elektronen in einem EM-Puls

Feynman (Lectures Vol. I, 34-9 The momentum of light): "Now as the electric field acts on the charge and moves it up and down, what does the magnetic field do?"

Wie bewegt sich ein Elektron, das von einer elektromagnetischen Welle (oder von Photonen?) getroffen wird?

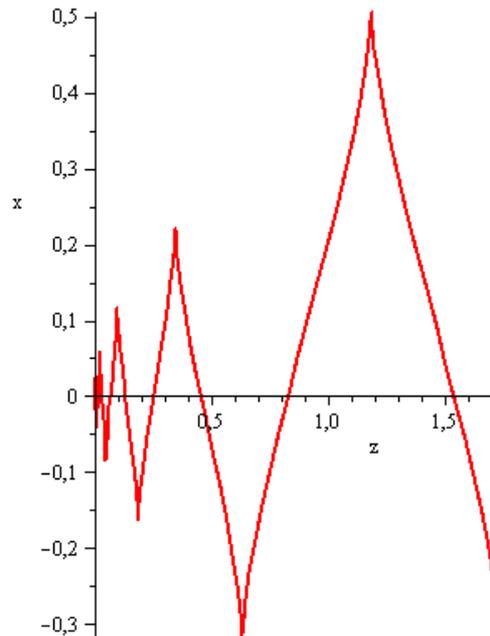
Lässt sich damit ein neuer Beschleuniger bauen?

In einem ersten Versuch kann man für die elektrische Feldstärke des EM-Pulses ein Gaußpaket nehmen, das sich in z-Richtung bewegt:

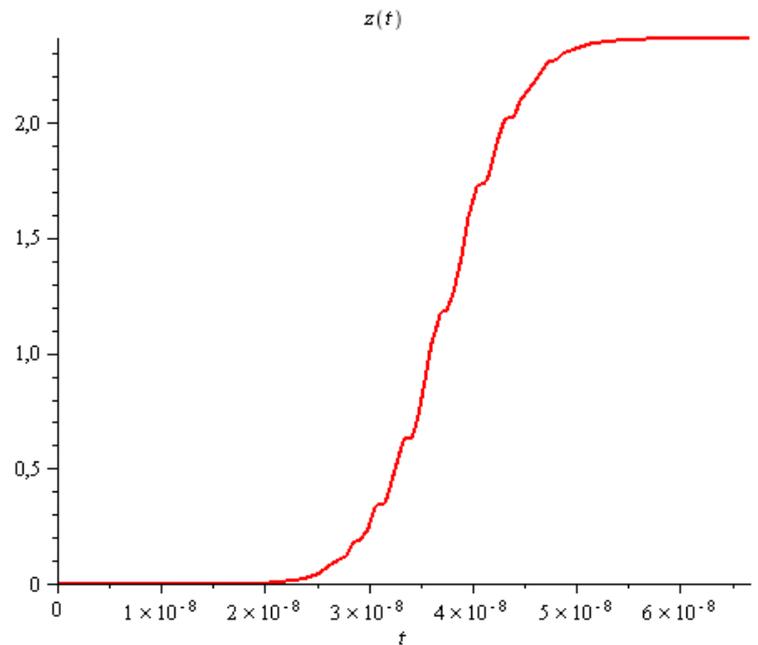
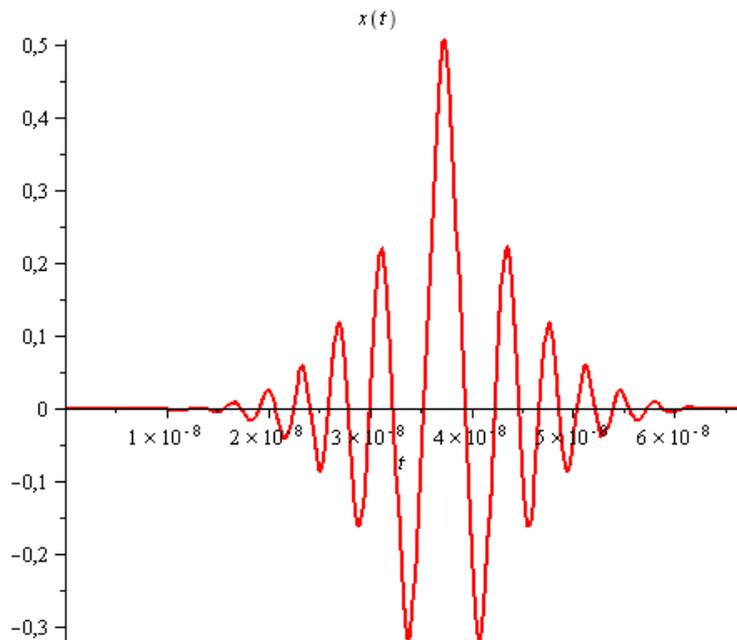
$$E_l := -E_0 \sin\left(-\frac{\omega z(t)}{c} + \omega t\right) e^{-\frac{(z(t)-ct)^2}{\sigma^2}}$$

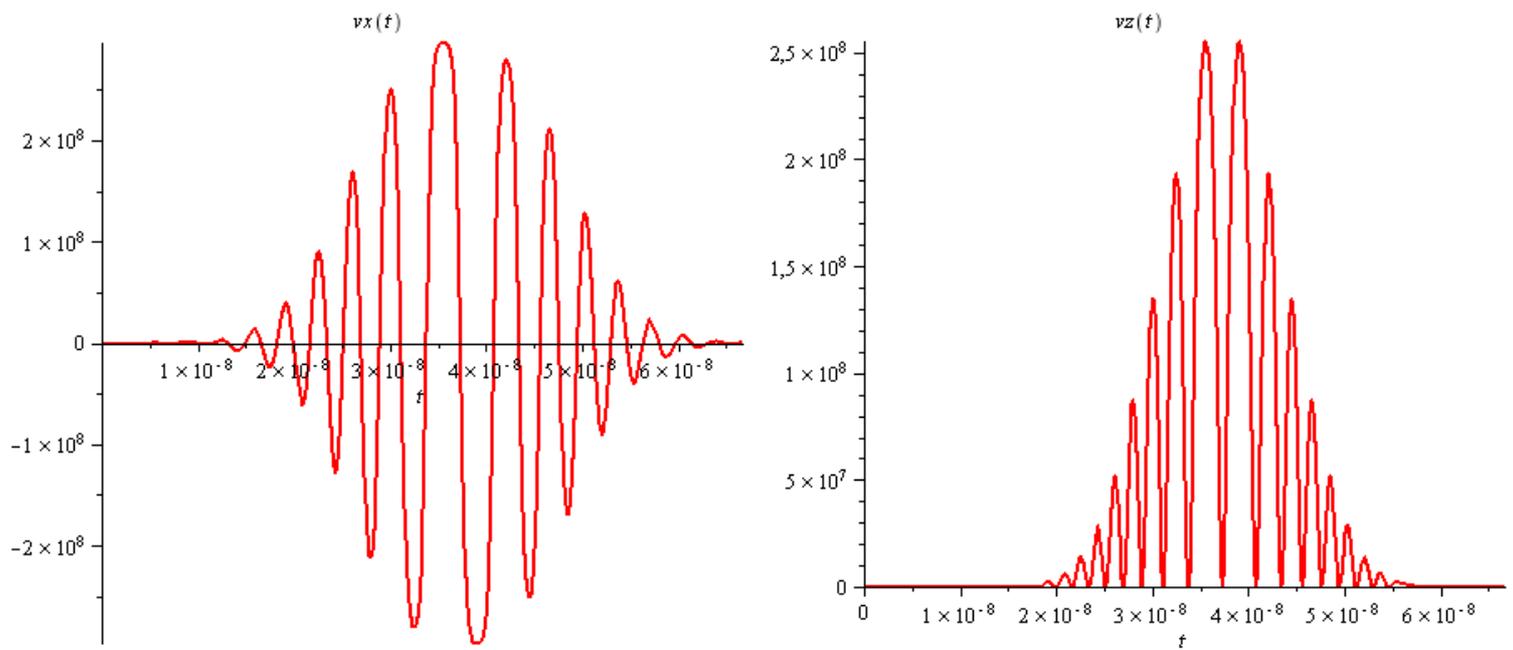
Dabei zeigt der Vektor der elektrischen Feldstärke in x-Richtung und der Vektor der magnetischen Flussdichte ( $B = E/c$ , B und E also gleichphasig) in y-Richtung.

Die Bewegung des Elektrons erhält man dann z.B. durch numerische Integration der nicht relativistischen Bewegungsgleichung, wobei die Längen als Vielfache der Wellenlänge der elektromagnetischen Welle abgetragen sind (verschiedene Maßstäbe auf den Achsen).



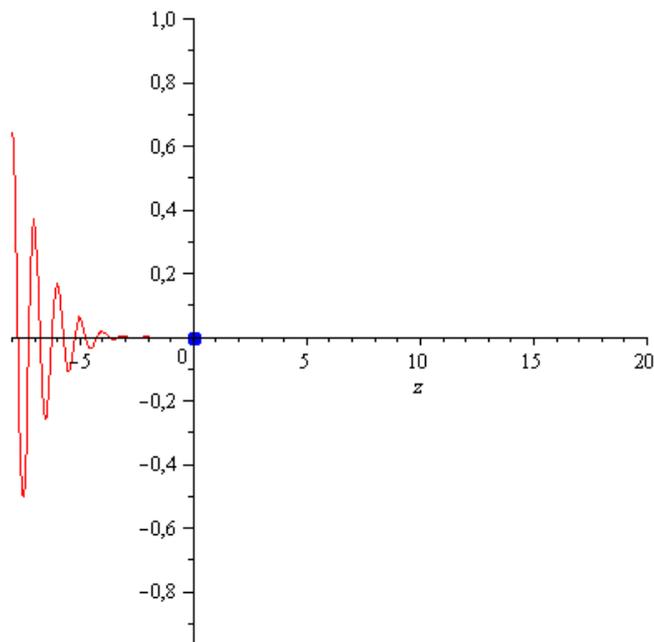
Aber selbst wenn man die elektrische Feldstärke so groß wählt, dass das Elektron bei seiner Schwingung in x-Richtung 99% der Lichtgeschwindigkeit erreicht, wird es nur stark zwei Wellenlängen in z-Richtung (bei der gewählten Pulsbreite) transportiert und wieder abgesetzt, sobald die elektrische Feldstärke abnimmt. So lässt sich also eine Elektronenkanone der neuen Art nicht bauen. Dennoch sind die Details der so berechneten Bewegung interessant:





Feynman: "While the thing is going up and down it has a velocity and there is a force on it,  $B$  times  $v$  times  $q$ ; but in which *direction* is the force? *It is in the direction of the propagation of light.*"  
Zumindest im Mittel ;-))

Auch Einstein soll sich schon gewünscht gehabt haben, auf einer Lichtwelle zu reiten (von den Surfern unserer Zeit ganz zu schweigen). Man sollte sich also in einer Animation ansehen, wie es unserem Modellelektron bei diesem Ritt ergeht:



Nun ja, wenn man es nicht schafft, vor der Welle zu bleiben, kann das auch daran liegen, dass die Welle zu klein war.

- Wir versuchen es mit einer [höheren elektrischen Feldstärke](#)
- Wir versuchen es mit einem [seitlich begrenztem Wellenpaket](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Paul-Falle, mechanisches Analogon

Wie fängt man elektrisch geladene Teilchen ein?

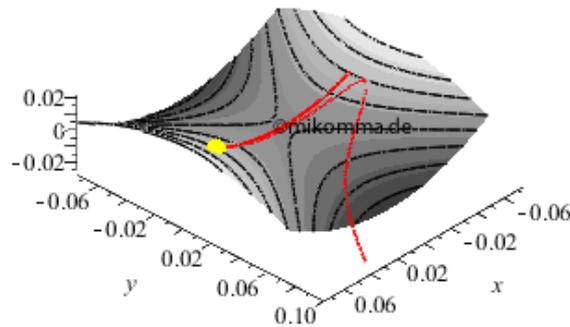
Das ist nicht ganz einfach, insbesondere wenn man die Teilchen zur Ruhe bringen will!  
Deshalb gab es 1989 auch den [Nobel Prize in Physics](#) dafür.

Mit statischen Feldern ist das nicht möglich. Man muss vielmehr versuchen, das Teilchen durch passende Ansteuerung der Felder "in der Balance zu halten". Kellner schaffen dieses dynamische Gleichgewicht meist länger als Rodeoreiter.

Auch Wolfgang Paul benutzte ein mechanisches Analogon, um dem erstaunten Publikum seine geniale Idee verständlich zu machen: In einer Paul-Falle verhält sich ein elektrisch geladenes Teilchen *ähnlich* wie eine Kugel auf einer rotierenden Sattelfläche im Schwerfeld. Die *Ähnlichkeit* stimmt auch. Man sollte aber nicht in die Falle tappen, das mechanische Analogon mit der elektrischen Paul-Falle *gleichzusetzen*.

Wir setzen die Kugel zunächst auf einen ruhenden Sattel, der so gebaut ist, dass die Kugel für  $y = 0$  nicht herunterfällt (labiles Gleichgewicht in  $y$ -Richtung). Aber schon bei einer Abweichung des Startpunktes von  $10^{-8}$  m in  $y$ -Richtung führt die Kugel nur zwei Schwingungen aus, bevor sie abstürzt.

|| (0.) || 4 || (3.2) || (0.05) || (1. 10<sup>-8</sup>) || 0 || 0 || 0

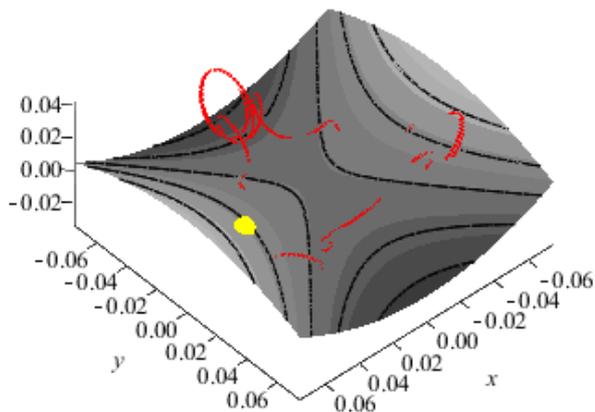


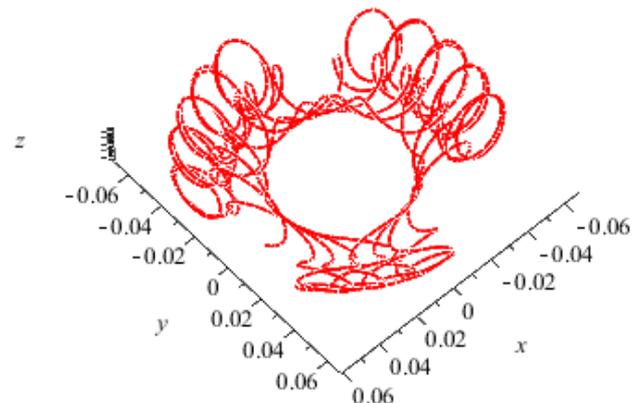
Was macht nun eine Kugel, die unter geeigneten Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit) auf eine rotierende Sattelfläche (geeigneter Form und Winkelgeschwindigkeit) gesetzt wird?

Meistens fliegt sie einfach raus! Es gibt aber "besonders geeignete" Anfangsbedingungen und Formen des Sattels, z.B.:

Sattelform  $z = a \cdot x^2 - b \cdot y^2$ . Hier  $a=4$ ,  $b=3.2$ ,  $g=10$  (MKS-Einheiten).  
Sieht eigentlich aus wie ein Tischtennisball auf Wasser...

Bei "besonders" geeigneten Anfangsbedingungen schwimmt der Ball auf einem "präzedierenden Dreieck" beliebig lange:

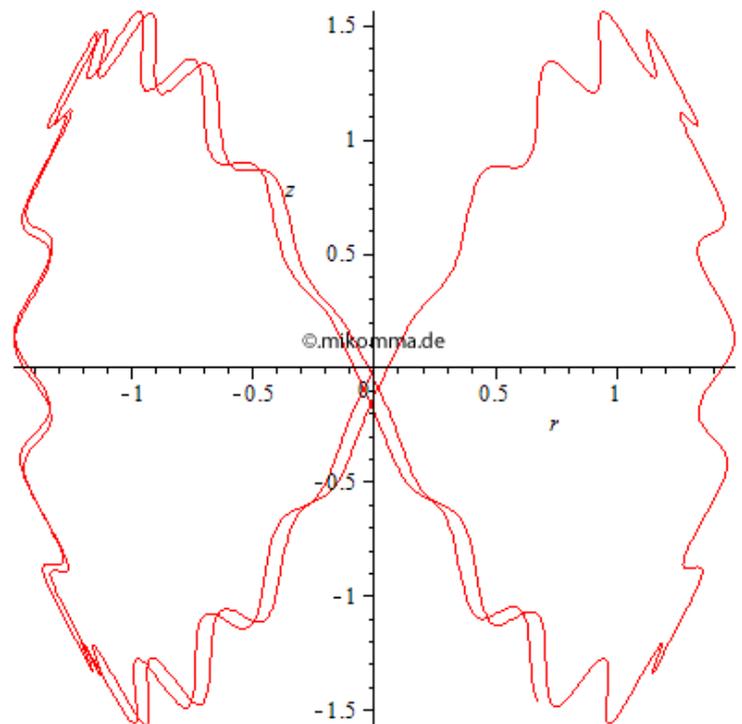
$$\| (0.) \| 4 \| (3.2) \| (0.05) \| (0.01)$$


$$4 \| (3.2) \| (0.05) \| (0.01) \| (9.86)$$


Wie obige Simulationen zeigen ist es theoretisch möglich, eine Kugel auf einer rotierenden Sattelfläche zu balancieren - und es gibt auch Experimente dazu. Aber Vorsicht, es gibt gravierende Unterschiede zur elektrischen Paul-Falle!

1. In der [elektrischen Paul-Falle](#) bewegt sich das Teilchen mehr oder weniger auf "Lissajou-Bahnen" (makroskopisch) mit "mikroskopischen" Schwankungen (siehe Abbildung rechts). Der Sattel der elektrischen Paul-Falle ([Standard](#)) rotiert nicht.
2. Im Gegensatz zur elektrischen Paul-Falle, bewegt sich ein Teilchen auf dem rotierenden Sattel nicht frei (im Schwerfeld), sondern erfährt *Zwangskräfte* durch die Sattelfläche (leider anholonom).
3. Im Vergleich zur elektrischen Paul-Falle ist die mechanische hoch chaotisch: Das "präzedierende Dreieck" ist nur ein Beispiel aus Millionen.

Man sollte also nicht in diese weit verbreitete Falle tappen: ["Ein Teilchen, das sich im \(homogenen\) Schwerfeld auf einer parabelförmigen Fläche bewegen muss, befindet sich in einem quadratischen Potential!"](#)



© M. Komma 12/2010

Siehe auch:  
Mechanisches Analogon, [Details](#) | [Elektrisches Analogon](#) | Paul-Falle, [Standard](#)

Methode:  
- Bewegung auf rotierendem Sattel: Aufstellen der Differentialgleichungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren, numerische Lösung mit Maple.  
- Elektrische Paul-Falle: Lösung der Mathieuschen Differentialgleichungen mit Maple.

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

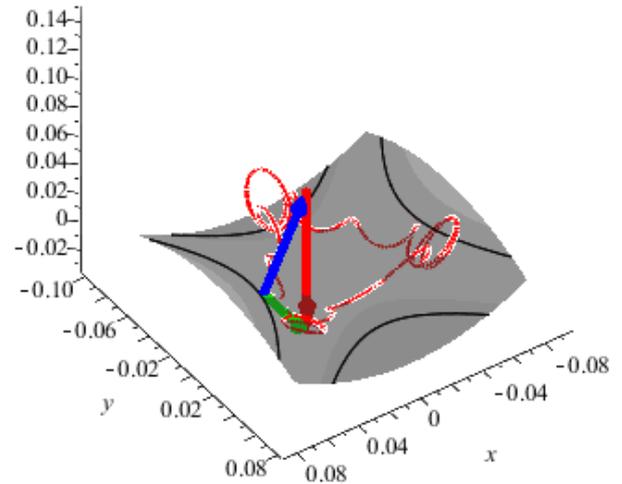
Was macht nun eine Kugel, die unter geeigneten Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit) auf eine rotierende Sattelfläche (geeigneter Form und Winkelgeschwindigkeit) gesetzt wird?

Meistens fliegt sie einfach raus! Es gibt aber "besonders geeignete" Anfangsbedingungen und Formen des Sattels, z.B.:

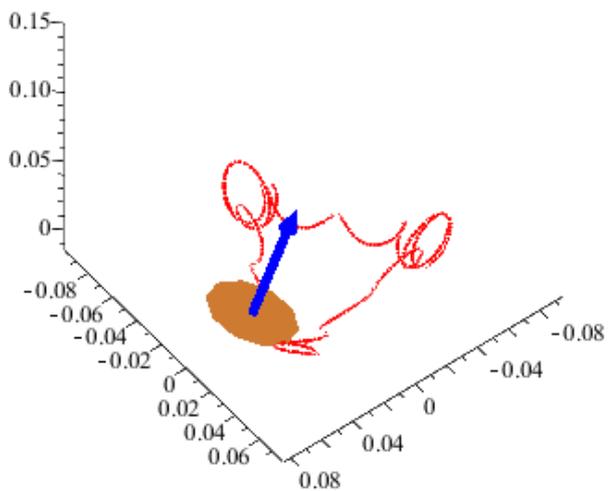
Sattelform  $z=a*x^2-b*y^2$ . Hier  $a=4$ ,  $b=3.2$ ,  $g=10$  (MKS-Einheiten).

Darstellung mit Kraftpfeilen:

Zwangskraft blau, Schwerkraft rot, resultierende Kraft grün (für die Darstellung geeignet skaliert).



Same procedure as every year...



Wo liegt der Tiger?

© M. Komma 12/2010

[Elektrisches Analogon :-\)\)](#)

## [Mechanisches Analogon](#)

Methode:

- Bewegung auf rotierendem Sattel: Aufstellen der Differentialgleichungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren, numerische Lösung mit Maple.
- Elektrische Paul-Falle: Lösung der Mathieschen Differentialgleichungen mit Maple.

## [Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerfeld

Wie kann man im Schwerfeld (konstante Kraft in eine Richtung, lineares Potential) einen Körper harmonisch (lineare *Rückstellkraft*, quadratisches Potential) schwingen lassen?

Das ist ohne eine Feder nicht ganz einfach und genau genommen gar nicht möglich!

Trotzdem findet man in Generationen von Physiklehrbüchern solche Sätze (sinngemäß):

"Wir betrachten einen harmonischen Oszillator wie z.B. einen Ball, der reibungsfrei in einem quadratischen Potential rollt".

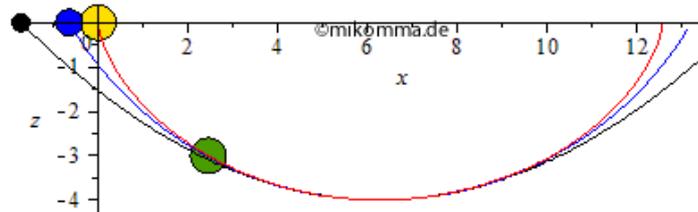
Und daneben die Abbildung eines Balls auf einer Parabel (im Schwerfeld). Besonders in der Quantenphysik ist diese Analogie beliebt, wenn man den (harmonischen) [quantenmechanischen Oszillator](#) anschaulich beschreiben will.

Dabei weiß doch jeder Physiker, dass das Fadenpendel nicht harmonisch schwingt. Und jeder Bergsteiger ist froh, dass er leichter wird, wenn er auf den Himalaya steigt und nicht mit einem Bungee-Seil an die Talstation angebunden ist. Warum sollte also ausgerechnet eine Parabelbahn eine harmonische Schwingung zur Folge haben? Das kann wohl kaum sein: Wenn man die Parabel sehr steil macht, "schwingt" der Ball im freien Fall und das ist keine Sinusschwingung!

Also eigentlich müsste man dieses Problem gar nicht näher untersuchen. Es lohnt sich aber doch:

1. Theoretische Mechanik ist einfach schön!
2. Solche Märchen (zu kurz gefasste Analogien) hindern Lernende am Verständnis, Aufklärung tut also not!

Lassen wir also ein paar Bälle reibungsfrei auf verschiedenen Bahnen (natürlich im homogenen Schwerfeld) "reibungsfrei rollen"!

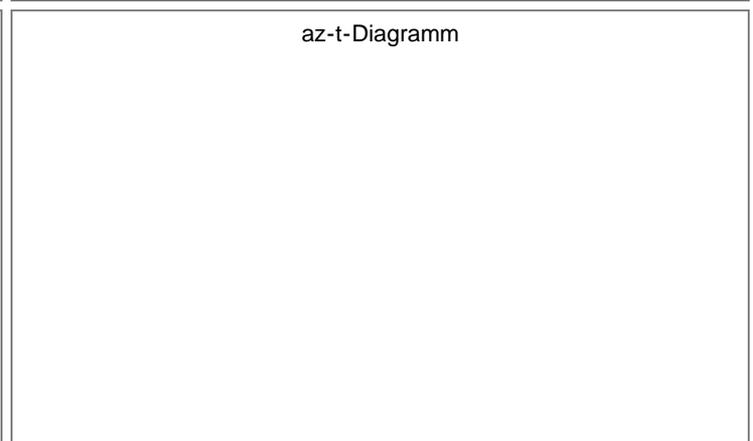
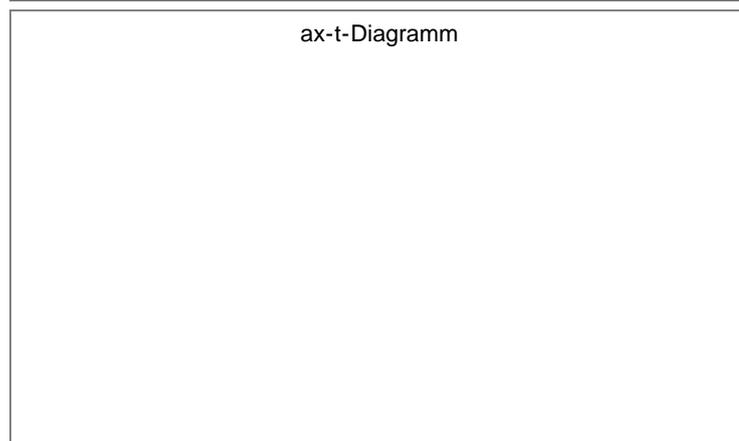
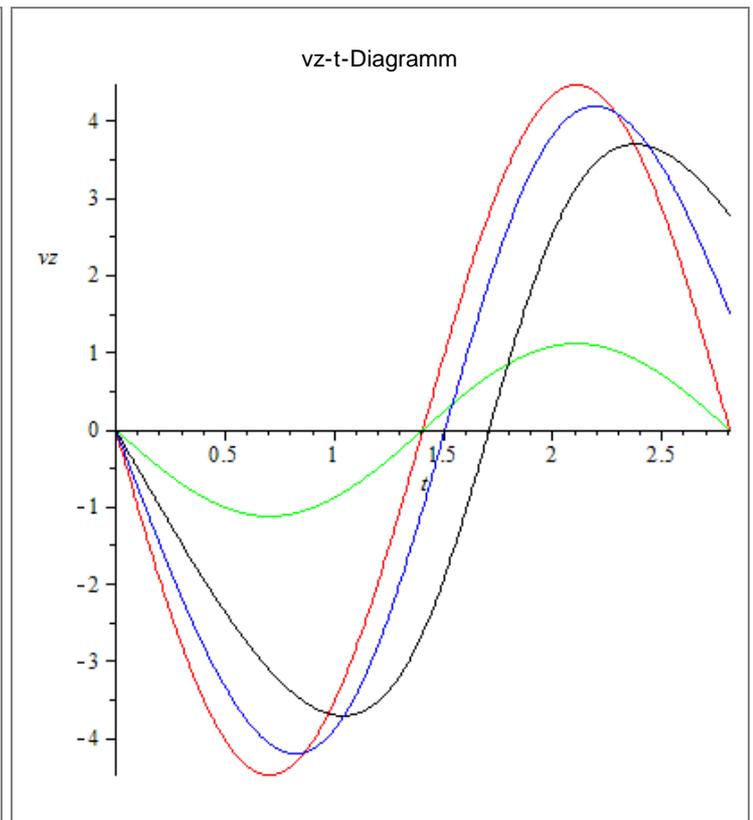
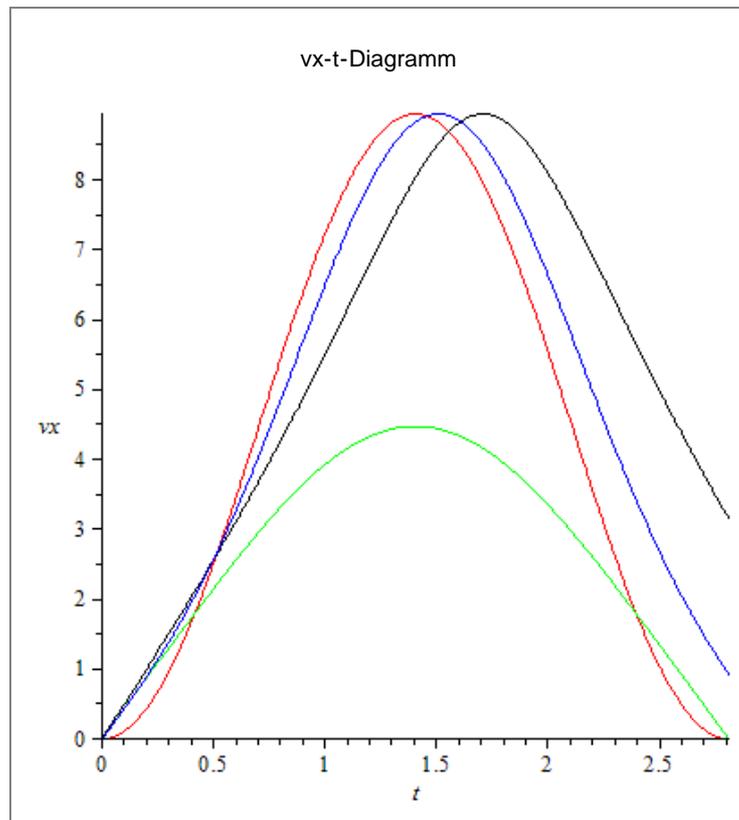
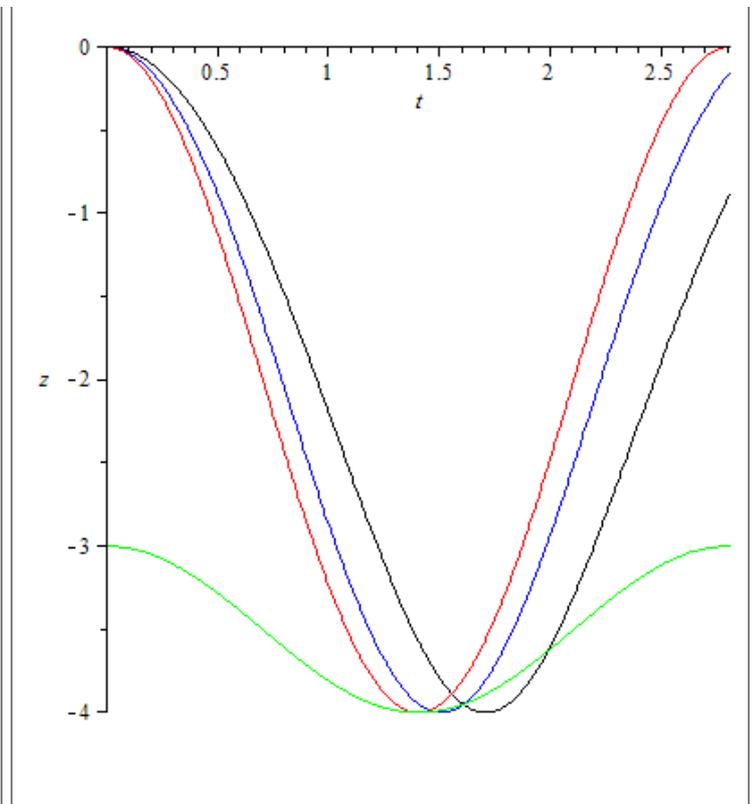
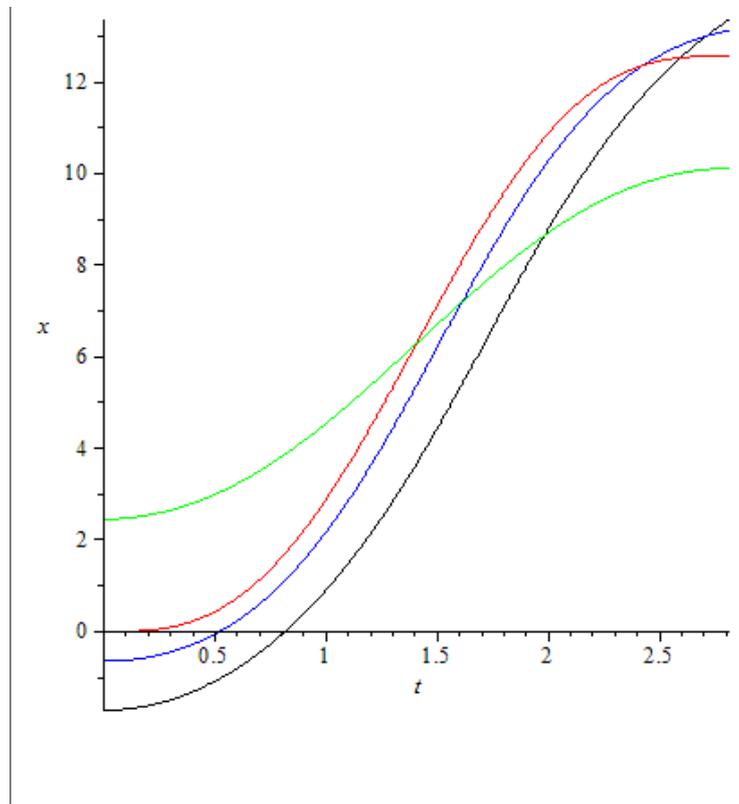


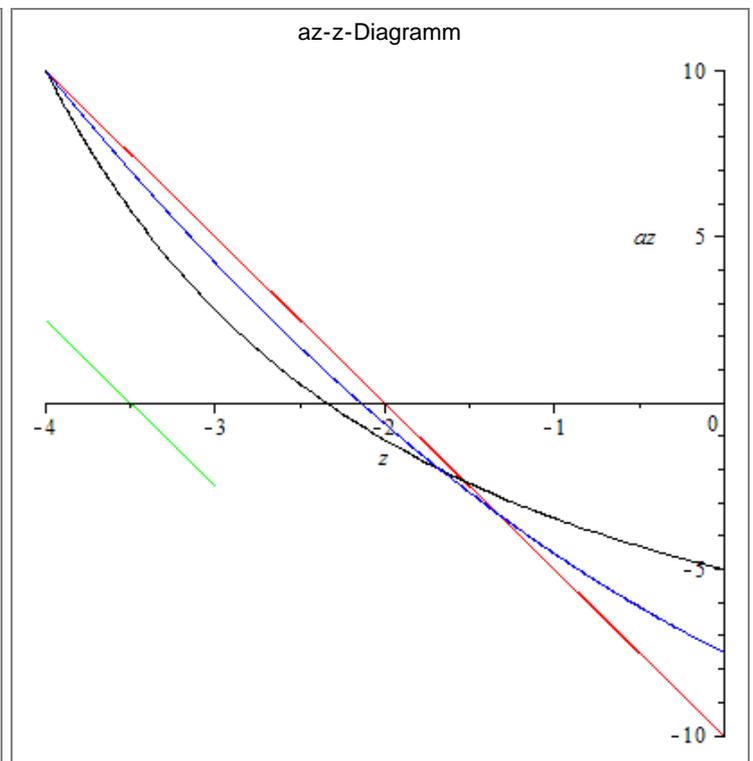
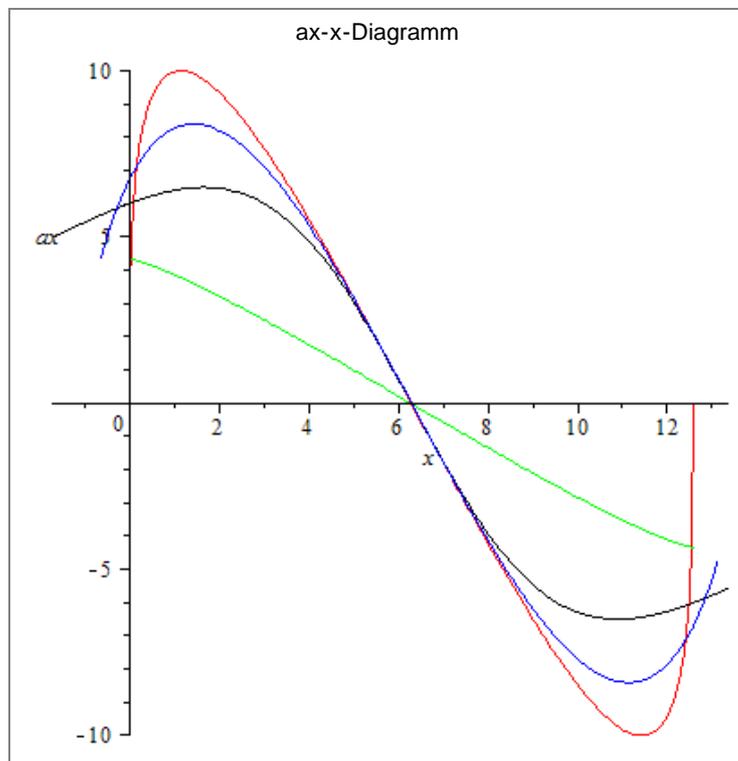
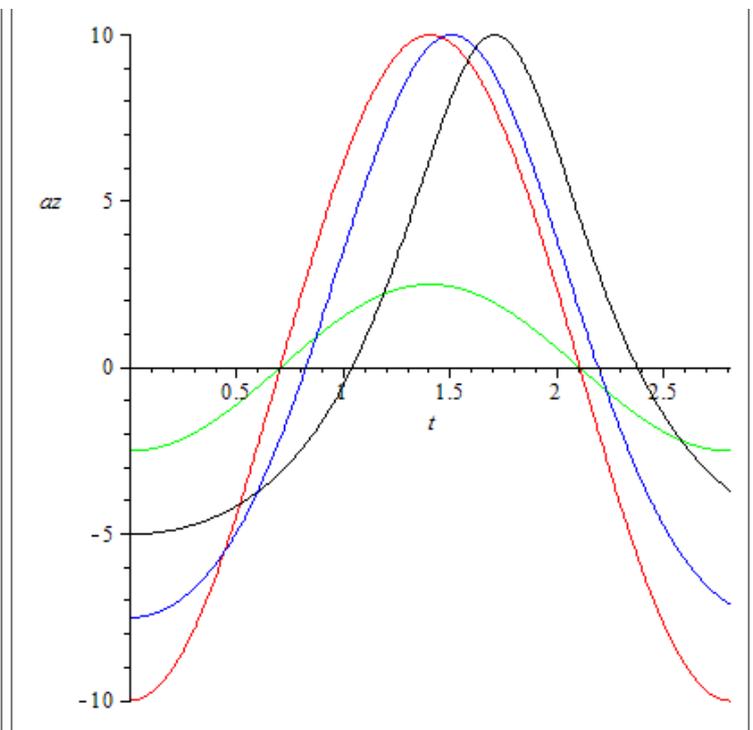
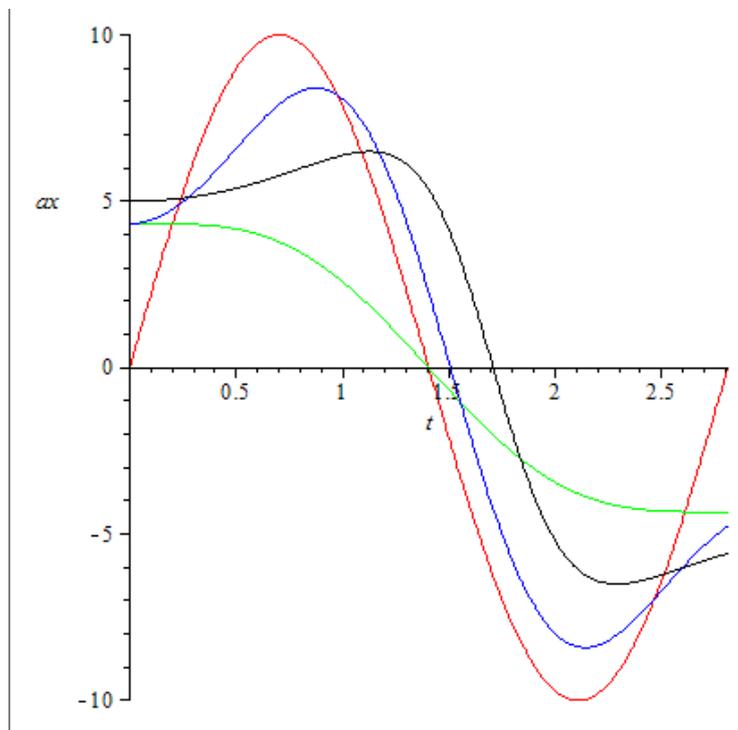
Die Bälle *gleiten* reibungsfrei, sie rollen nicht. Der gelbe und der grüne Ball bewegt sich auf einer **Zykloidenbahn** (rot, **Zykloidenpendel**). Der blaue auf einem **Kreis** (blau, Fadenpendel = Kreispendel) und der schwarze auf einer **Parabel** (schwarz, harmonisches Pendel??). Der grüne Ball hat die gleiche Schwingungsdauer (-> Tautochrone) wie der gelbe, nämlich die kleinstmögliche (-> Brachystochrone), wenn man den Höhenunterschied vorgibt. Alle Bahnen haben im Tiefpunkt den gleichen Krümmungsradius. Die Animation läuft nach der halben Schwingungsdauer des Zykloidenpendels rückwärts, blau und schwarz werden also "reflektiert" bevor sie den rechten Umkehrpunkt erreichen.

Welcher Ball schwingt nun harmonisch? Hier eine kleine Übung zum Lesen von Diagrammen (Farben siehe oben. Tipp: je höher der Grad der Ableitung, desto differenzierter die Aussage):

x-t-Diagramm

z-t-Diagramm

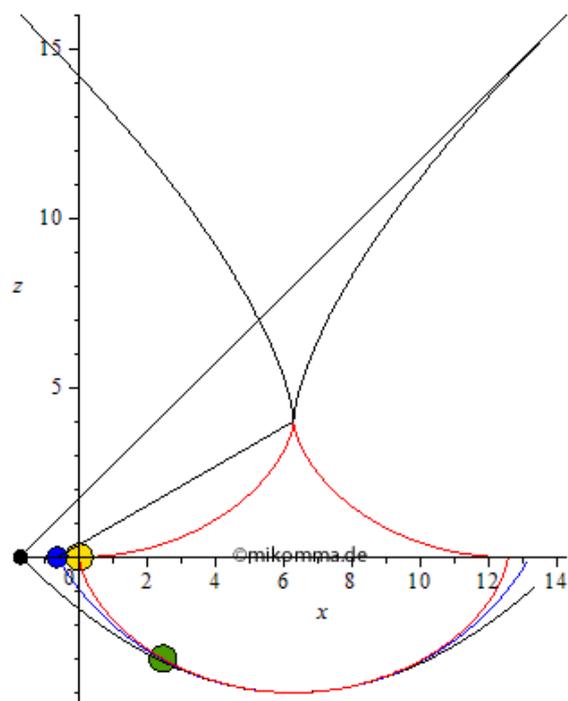
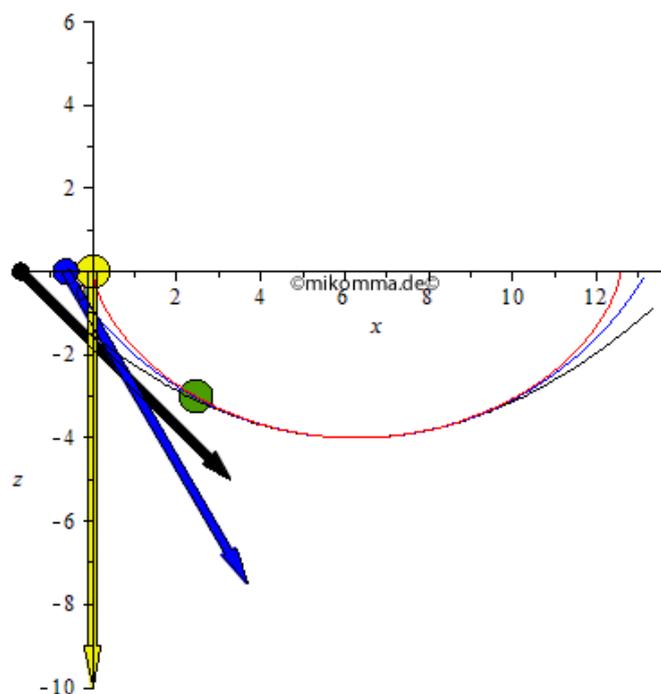




Und die Moral von der Geschichte? Das gute alte Fadenpendel ist für kleine Auslenkungen die beste Analogie für harmonische Schwingungen im Schwerfeld. Aber das wussten wir ja schon immer!

Oder haben wir etwas vergessen? Was sagen uns diese Animationen?

Evolution!



Also könnte man die Schwingung doch auch dadurch harmonisch machen, dass die anharmonischen Pendel an der passenden Stelle "reflektiert" werden? Und wie würde dann das quantenoptische Analogon aussehen?

Etwas ernsthafter: In der linken Animation oben sind die resultierenden Beschleunigungen dargestellt, in der rechten die Evoluten (falls jemand ein [Zykloidenpendel](#) und "Parabelpendel" konstruieren will).

Wenn man so will, schwingt das Zykloidenpendel also harmonisch, weil der Massenpunkt zu jeder Zeit die (betragsmäßig) gleiche "Zentripetalbeschleunigung" erfährt. Allerdings bewegt sich das Kreiszentrum (gleichförmig in x-Richtung), so dass nur die Schwingung in z-Richtung streng harmonisch ist. Man beachte auch die Beschleunigungsdiagramme weiter oben, insbesondere das ax-x-Diagramm. Im ax-t-Diagramm ist für das Zykloidenpendel zwar ein Sinus zu sehen (und es ist wirklich einer), aber auch das gilt nur für das gelbe Zykloidenpendel. Hier lauert übrigens ein weiterer Trugschluss: Wenn man die Zykloidengleichung in Parameterform zwei Mal nach dem Parameter ableitet, erhält man die Parameterdarstellung eines Kreises. Also eine harmonische Schwingung? Nicht unbedingt! Es gibt beliebig viele Parameterdarstellungen einer mathematischen Kurve, aber die physikalische Bewegung läuft in *der einen* Zeit ab (wenn sie nicht zu schnell abläuft :-).

Dass der Versuch, ein harmonisches Pendel im Schwerfeld (und ohne Feder) zu betreiben, das mit beliebigen Frequenzen und Auslenkungen funktioniert, zum Scheitern verurteilt ist, zeigt auch die Animation mit den Evoluten: Um die Anharmonizität des Kreispendels zu kompensieren, muss die Fadenlänge laufend verkürzt werden (im Vergleich zum Kreispendel). Mit einer laufenden Verlängerung des Fadens wie etwa beim Parabelpendel wird die Schwingung nur noch anharmonischer. Das Zykloidenpendel markiert also ein "relatives Optimum". Relativ in diesem Sinne: Die Zykloidenkurve hat in den Umkehrpunkten eine senkrechte Tangente, hier wirkt also die volle Fallbeschleunigung. Aber mehr ist nun einmal aus dem Schwerfeld nicht herauszuholen. Wer also mit Hilfe einer "geeigneten Bahn" aus dem Schwerfeld das Feld einer Feder machen will, muss wissen, dass diese "Feder" ab einer gewissen Dehnung nur noch eine konstante Kraft liefert.

Wussten wir das nicht schon immer?

© M. Komma 01/2011

Methode: Aufstellen der Differentialgleichungen mit Lagrange (wahlweise 1. oder 2. Art) und Maple. Lösung der Differentialgleichungen mit Maple, z.B. mit "[Newtons Maschine](#)". Die Differentialgleichung für die Zykloide lässt sich geschlossen lösen.

Siehe auch:

[Kreispendel](#)

[Zykloidenpendel](#)

Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)

Paulfalle, [Standard](#)

Paulfalle, [Mechanisches Analogon](#) | Paulfalle, Mechanisches Analogon, [Details](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

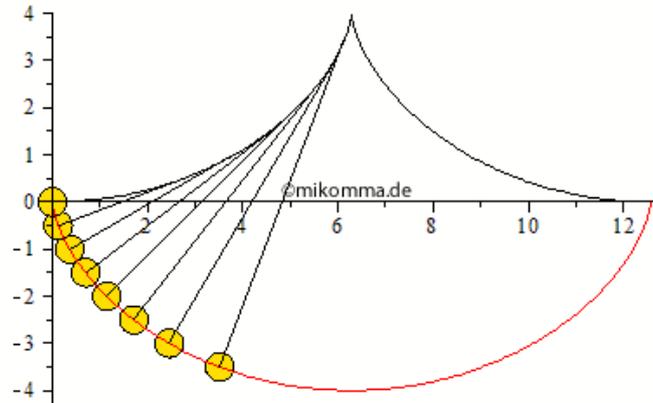
[Quantenphysik](#)

[Top](#)

# Zykloidenpendel

Augenwischer oder Scheibenwischer?

Ergänzung zu ["Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerfeld"](#)



Im Internet findet man zum Beispiel auch diese Märchen (Januar 2011):

"Im Gegensatz zum mathematischen Fadenpendel ist aber die Bewegung exakt harmonisch, d.h. die Schwingungsfrequenz ist unabhängig von der Amplitude." Oder:

"Beim Zykloidenpendel hat man nämlich unabhängig von der Auslenkung in der Tat eine harmonische Schwingung. Das wußte übrigens schon Huygens! "

"In der Tat...": Die verschiedenen Punkte der Scheibenwischerblätter meines Autos haben alle die gleiche Schwingungsdauer. Schwingen sie also harmonisch?

Mal sehen, was Maple (und das Physics-Package) dazu sagt:

Lagrangefunktion

> L := T - V;

$$L := T - V \quad (1)$$

Potentielle Energie

> V := m\*g\*z;

$$V := m g z \quad (2)$$

kinetische Energie

> T := 1/2\*m\*(v\_ . v\_);

$$T := \frac{m \|\vec{v}\|^2}{2} \quad (3)$$

Ortsvektor (allgemein)

```
> r_ := x*_i + z*_j;
```

$$\vec{r} := x \hat{i} + z \hat{j} \quad (4)$$

Nebenbedingung

```
> zyκλο := [x = R*(phi(t)-sin(phi(t))), z = R*(-1+cos(phi(t)))];
```

$$\text{zyklo} := [x = R(\phi(t) - \sin(\phi(t))), z = R(-1 + \cos(\phi(t)))] \quad (5)$$

Ortsvektor neu

```
> r_:=subs(zyklo,r_);
```

$$\vec{r} := R(\phi(t) - \sin(\phi(t))) \hat{i} + R(-1 + \cos(\phi(t))) \hat{j} \quad (6)$$

Geschwindigkeit neu

```
> v_ := diff(r_, t);
```

$$\vec{v} := R(\dot{\phi}(t) - \cos(\phi(t)) \dot{\phi}(t)) \hat{i} - R \sin(\phi(t)) \dot{\phi}(t) \hat{j} \quad (7)$$

Potentielle Energie neu

```
> V := subs(zyklo,V);
```

$$V := m g R (-1 + \cos(\phi(t))) \quad (8)$$

Lagrangefunktion neu

```
> L := combine(L, trig);
```

$$L := m R^2 \dot{\phi}(t)^2 - m R^2 \dot{\phi}(t)^2 \cos(\phi(t)) + m g R - m g R \cos(\phi(t)) \quad (9)$$

Die folgende Substitution ist nicht erforderlich, liefert aber handlichere Ergebnisse.

```
> L:=algsubs(1-cos(phi(t))=2*sin(phi(t)/2)^2,L);
```

$$L := 2 m R^2 \dot{\phi}(t)^2 \sin\left(\frac{\phi(t)}{2}\right)^2 + 2 m g R \sin\left(\frac{\phi(t)}{2}\right)^2 \quad (10)$$

Euler-Lagrange Gleichung

```
> EL:=diff(diff(L,diff(phi(t),t)),t)-diff(L,phi(t))=0;
```

$$\begin{aligned}
 EL := & 4 m R^2 \ddot{\phi}(t) \sin\left(\frac{\phi(t)}{2}\right)^2 + 2 m R^2 \dot{\phi}(t)^2 \sin\left(\frac{\phi(t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi(t)}{2}\right) \\
 & - 2 m g R \sin\left(\frac{\phi(t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi(t)}{2}\right) = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Noch etwas umformen...

> EL:=expand(simplify(EL/(2\*m\*R^2\*sin(phi(t)/2))));

$$EL := 2 \ddot{\phi}(t) \sin\left(\frac{\phi(t)}{2}\right) + \dot{\phi}(t)^2 \cos\left(\frac{\phi(t)}{2}\right) - \frac{g \cos\left(\frac{\phi(t)}{2}\right)}{R} = 0 \tag{12}$$

Dies ist bei näherem Hinsehen eine Schwingungsgleichung für  $\cos(\phi(t)/2)$ , aber nicht für  $\phi(t)$ .

Lösung der DG mit allgemeinen Anfangsbedingungen

> soll:=dsolve([EL,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=omega0],phi(t));

$$\begin{aligned}
 soll := & \phi(t) \\
 = & 2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \left( -\frac{\omega 0 \sqrt{2 - 2 \cos(\phi 0)} \sqrt{R} \sin\left(\frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{R}}\right)}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{g} \cos\left(\frac{\phi 0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{R}}\right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

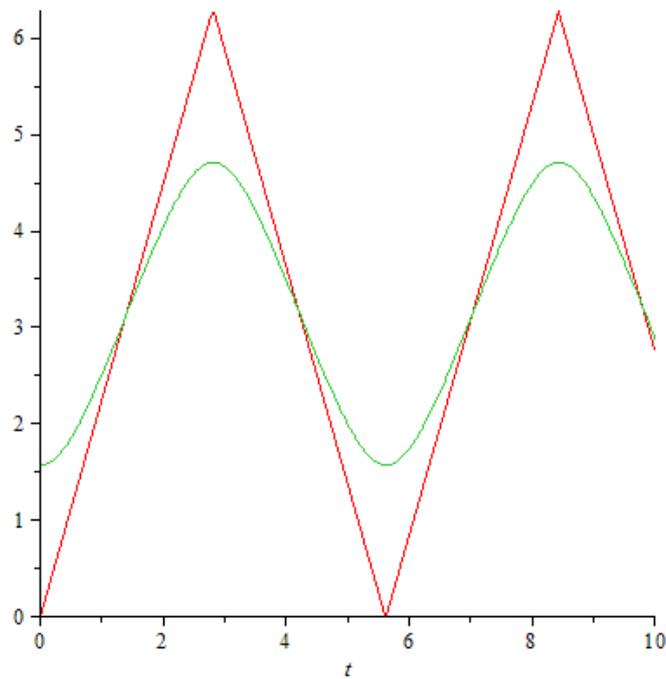
Etwas übersichtlicher

> phipl:=rhs(expand(soll));

$$\begin{aligned}
 phipl := & 2 \pi - 2 \arccos\left(\frac{\omega 0 \sqrt{2 - 2 \cos(\phi 0)} \sqrt{R} \sin\left(\frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{R}}\right)}{2 \sqrt{g}} \right. \\
 & \left. - \cos\left(\frac{\phi 0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{R}}\right) \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Wie sieht das im Prinzip aus (als Funktion der Zeit)?

> plot([eval(phipl,[g=10,R=2,omega0=0,phi0=0]),eval(phipl,[g=10,R=2,omega0=0,phi0=Pi/2])],t=0..10);

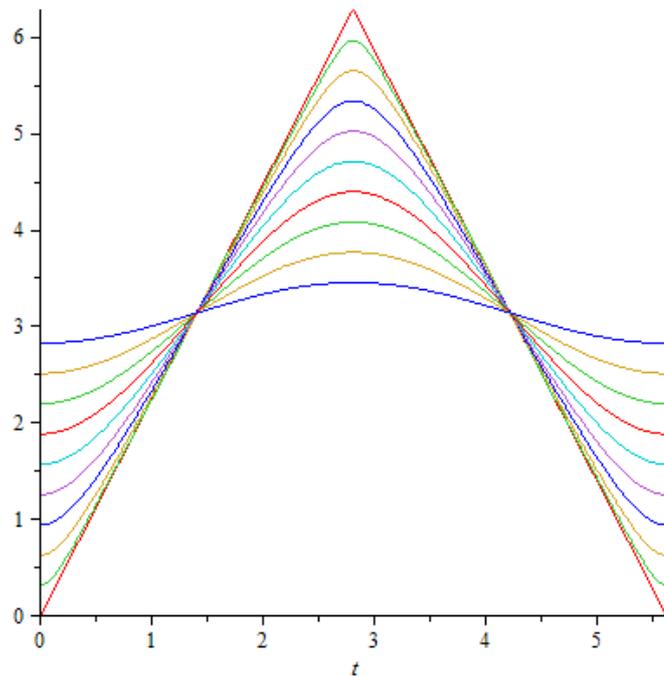


Nicht unbedingt harmonisch!

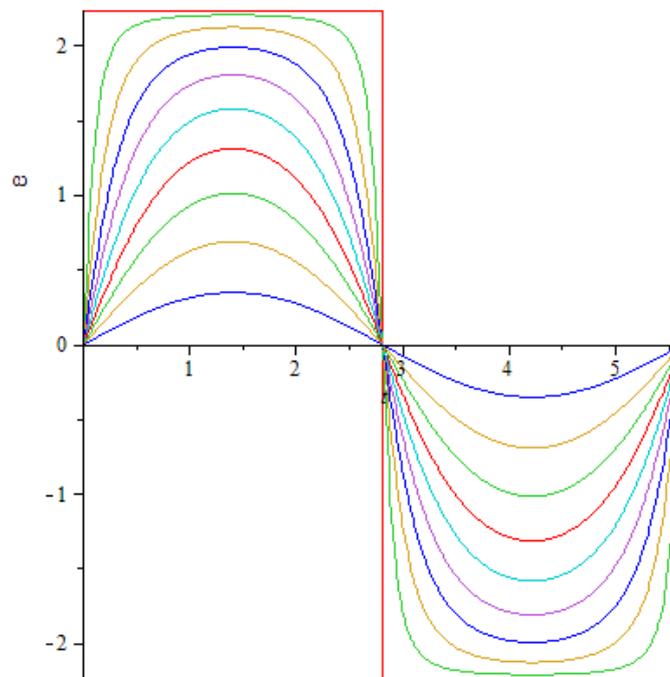
Im Folgenden ist die Anfangs(winkel)geschwindigkeit immer 0 und es wird nur der Startwinkel variiert. Dabei gehören die Kurven mit der größten Amplitude zum größten Startwinkel.

Wir testen zunächst  $\varphi(t)$  für verschiedene Startwinkel:

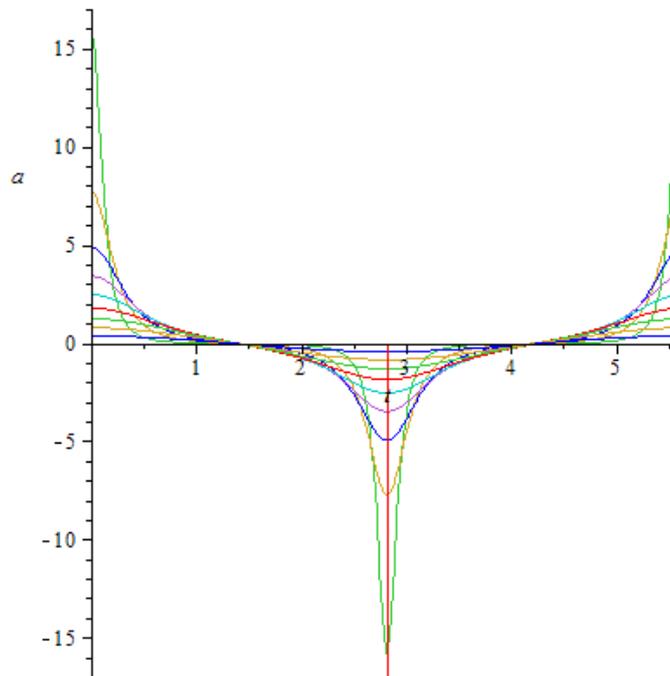
```
> plot([seq(eval(phi1,[g=10,R=2,omega0=0,phi0=sph]),sph=seq(Pi/10*i,i=0..9)),t=0..5.62);
```



Immerhin - die Schwingungsdauer hängt nicht von der Auslenkung ab (Isochronie, Tautochronie). Aber nur für kleine Auslenkungen  $\varphi(0)$  ändert sich der Winkel sinusförmig (-cosinusförmig). Für die volle Auslenkung rollt das Rad gleichförmig hin- und zurück, d.h., die *Winkelgeschwindigkeit* ist dann eine Rechteckfunktion:



Die Winkelbeschleunigung sieht so aus:



Das ist an den Umkehrpunkten der vollen Zykloide eine "Deltafunktion" (im Plot vertikal abgeschnitten). Es wird immer unharmonischer...

Wie sehen die **Koordinaten** aus (als Funktion der Zeit)?

> koord:=subs(soll,zyklo);

$$\text{koord} := \begin{bmatrix} x \\ R \left( 2 \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \left( -\frac{\omega_0 \sqrt{2 - 2 \cos(\phi_0)} \sqrt{R} \sin \left( \frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{R}} \right)}{2} \right) \right) \right) \end{bmatrix}$$



$$+ \sqrt{g} \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{R}}\right) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg)$$

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen könnten auch interessant sein (Ausgabe unterdrückt, weil umfangreich):

```
> vx:=diff(xc,t):
```

```
> vz:=diff(zc,t):
```

```
> ax:=diff(vx,t):
```

```
> az:=diff(vz,t):
```

Der Differentialgleichung **EL** bzw. ihrer Lösung **sol1** entnimmt man die Schwingungsdauer

```
> T:=2*Pi*sqrt(4*R/g):
```

$$T := 4 \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (18)$$

Dann können wir ja zur Tat schreiten:

```
> g:=10;R:=2;
```

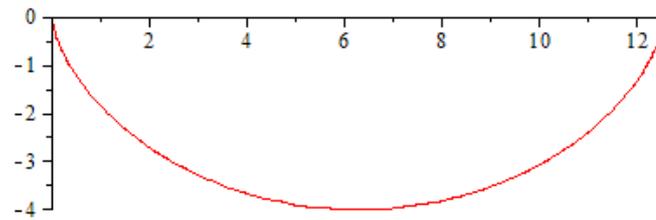
$$\begin{aligned} g &:= 10 \\ R &:= 2 \end{aligned} \quad (19)$$

```
> omega0:=0; phi0:=0;
```

$$\begin{aligned} \omega_0 &:= 0 \\ \phi_0 &:= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Ergibt das eine Zykloide?

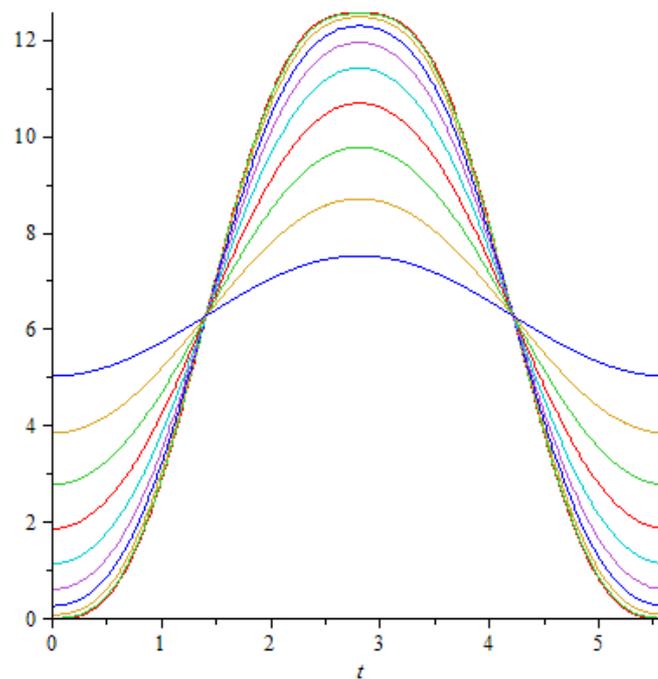
```
> plot([xc,zc,t=0..T],scaling=constrained);
```



Sieht so aus!

Wir sehen uns zunächst das x-t-Diagramm an

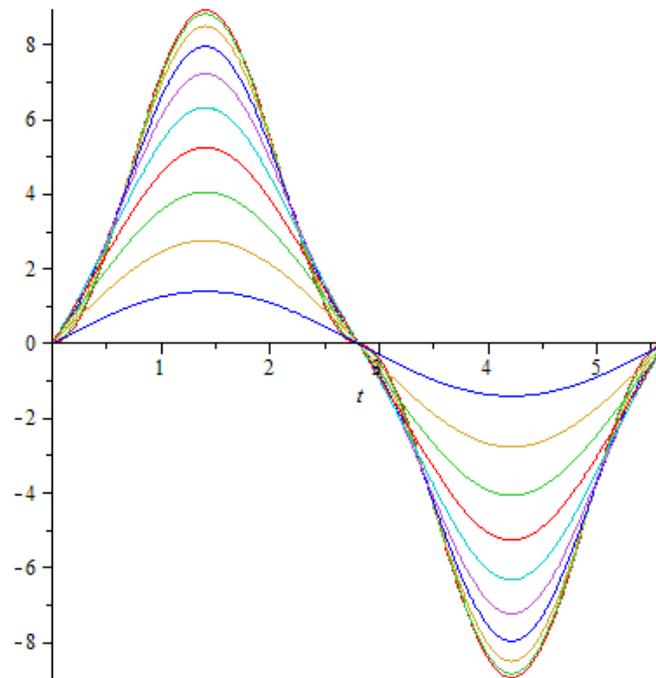
```
> phi0:='phi0':
> plot([seq(xc,phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),t=0..T);
```



In x-Richtung ist die Schwingung nur für kleine Auslenkungen harmonisch.

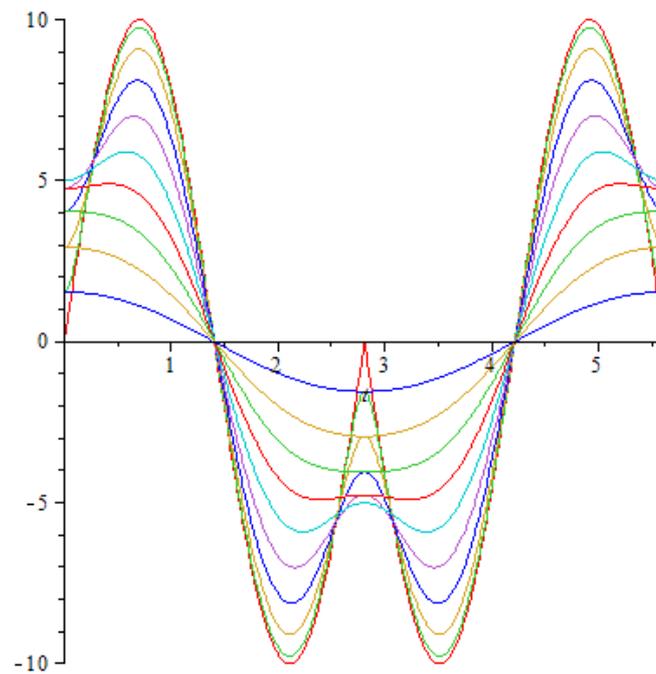
Dies zeigt auch das vx-t-Diagramm

```
> plot([seq(vx,phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),t=0..T);
```



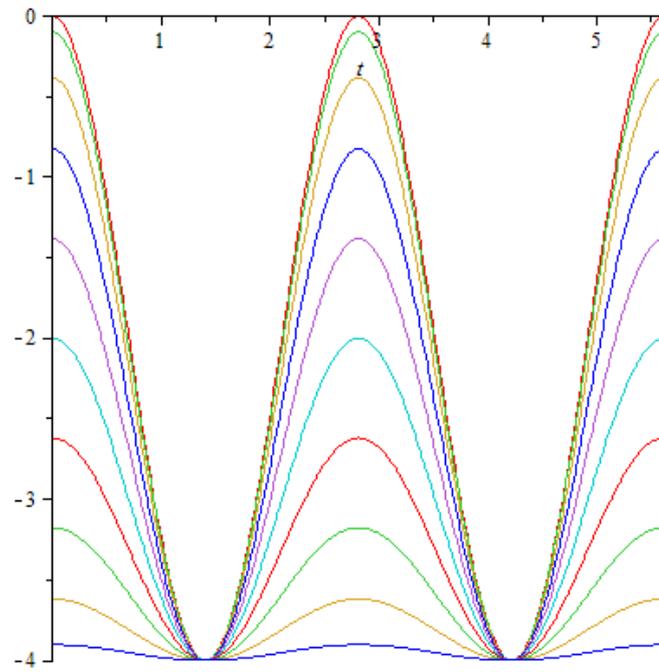
Und noch besser das ax-t-Diagramm

```
> plot([seq(ax,phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),t=0..T);
```

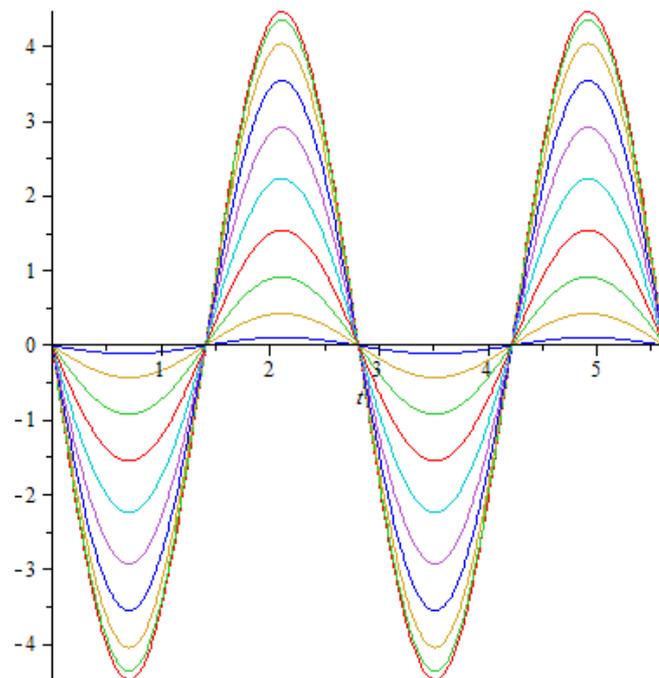


Im Vergleich dazu sind die Zeit-Diagramme für die Bewegung in z-Richtung eher langweilig, eben harmonisch...

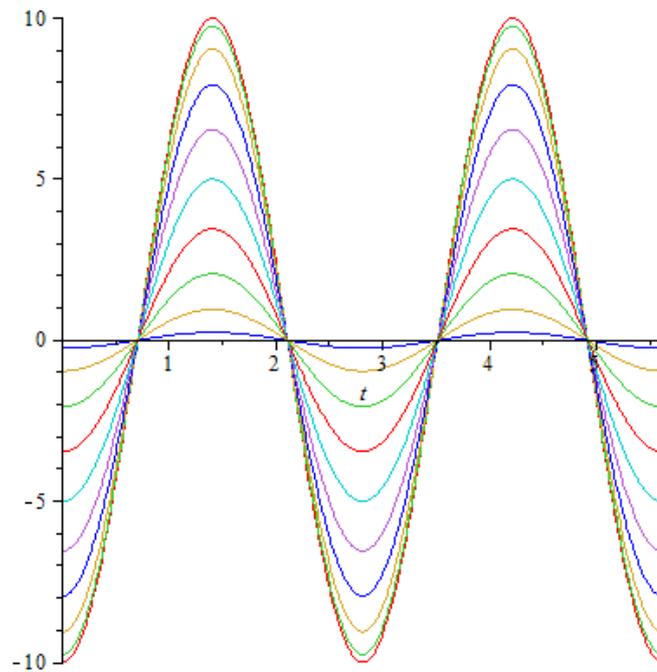
```
> plot([seq(zc,phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),t=0..T);
```



```
> plot([seq(vz,phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),t=0..T);
```



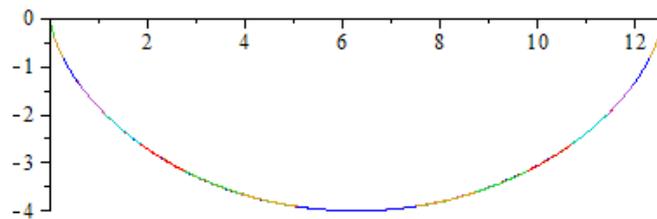
```
> plot([seq(az,phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),t=0..T);
```



## Phasendiagramme

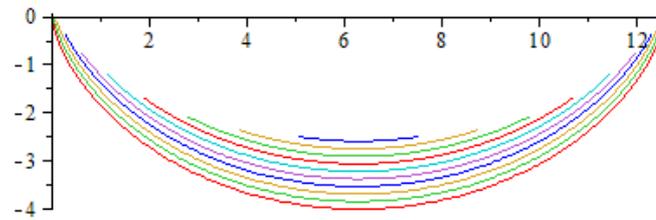
Zunächst noch einmal die Bahnen für verschiedene Auslenkungen

```
> plot([seq([xc,zc,t=0..T/2],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)],scaling=constrained);
```



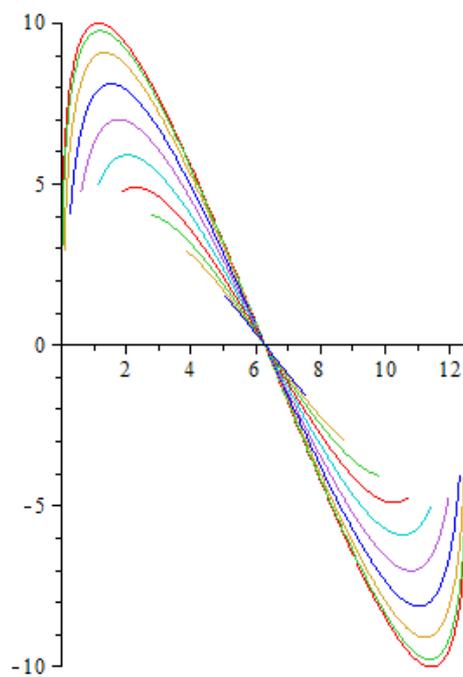
Mit einer künstlichen Verschiebung nach oben zur besseren Unterscheidung (Regenbogen einmal anders...):

```
> plot([seq([xc,zc+phi0/2,t=0..T/2],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)],scaling=constrained);
```



Und die Rückstellkraft als Funktion der Auslenkung in x-Richtung

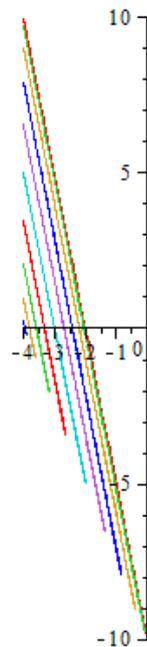
```
> plot([seq([xc,ax,t=0..T/2],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),scaling=constrained);
```



Nicht gerade linear!

Und die Rückstellkraft als Funktion der Auslenkung in z-Richtung

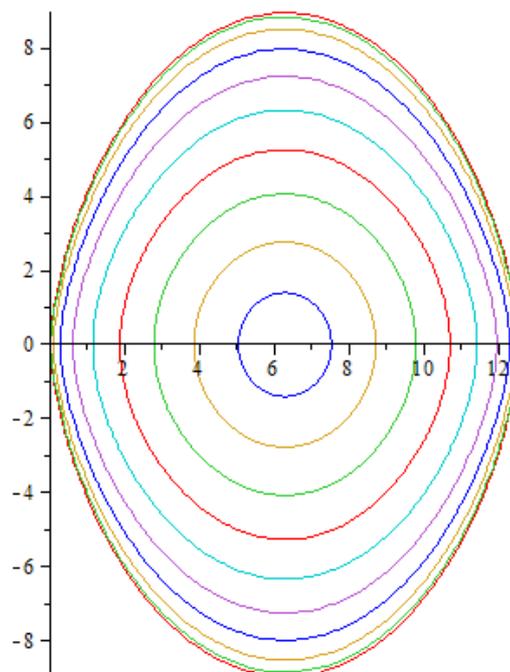
```
> plot([seq([zc,az,t=0..T/2],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),scaling=constrained);
```



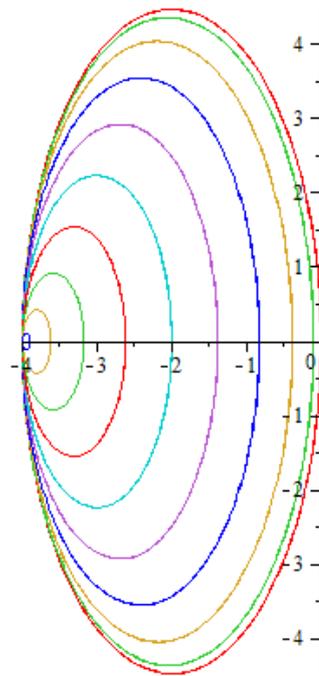
So sieht das Kraftgesetz für eine harmonische Schwingung aus!

Weitere Übungen zum Lesen von Phasendiagrammen. Lesehilfe: in den Plotbefehlen steht [Rechtsachse, Hochachse, Zeit=von..bis]. Im nächsten Diagramm wird also die Geschwindigkeit in x-Richtung ( $v_x$ ) über (und unter :- ) der x-Koordinate ( $x_c$ ) dargestellt:

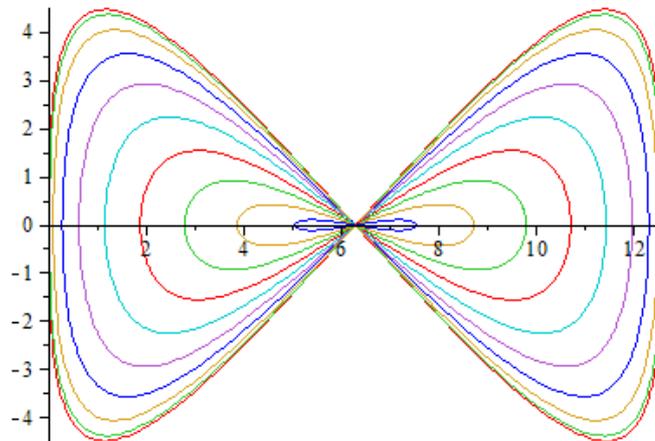
```
> plot([seq([xc,vx,t=0..T],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),scaling=constrained);
```



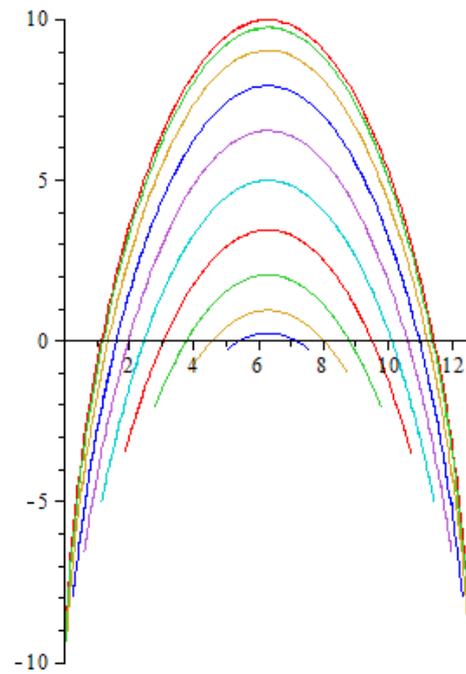
```
> plot([seq([zc,vz,t=0..T],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),scaling=constrained);
```



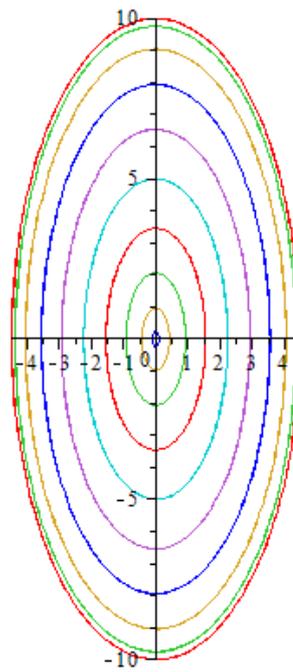
```
> plot([seq([xc,vz,t=0..T],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9))],scaling=constrained);
```



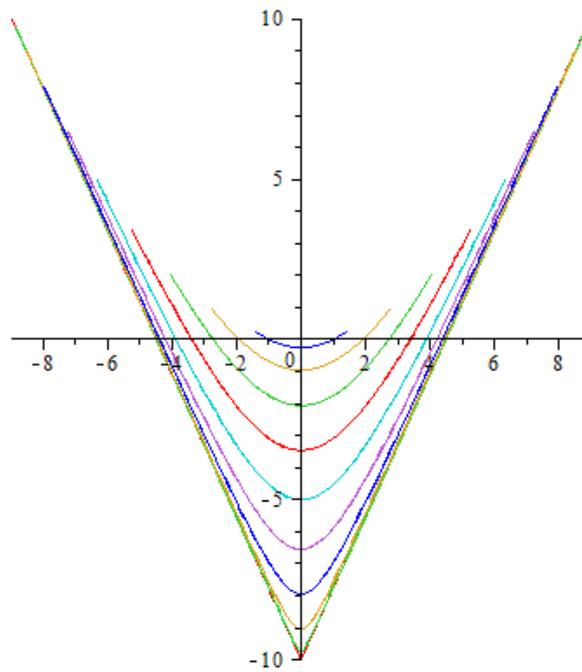
```
> plot([seq([xc,az,t=0..T],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9))],scaling=constrained);
```



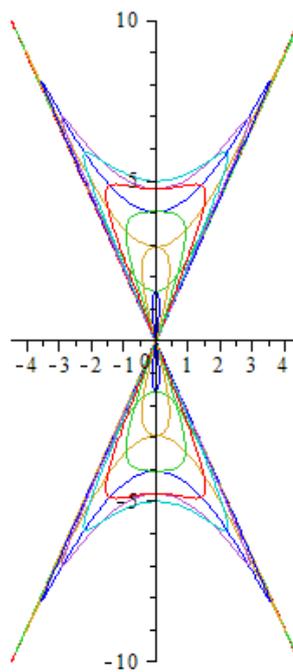
```
> plot([seq([vz,az,t=0..T],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),scaling=constrained);
```



```
> plot([seq([vx,az,t=0..T],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),scaling=constrained);
```

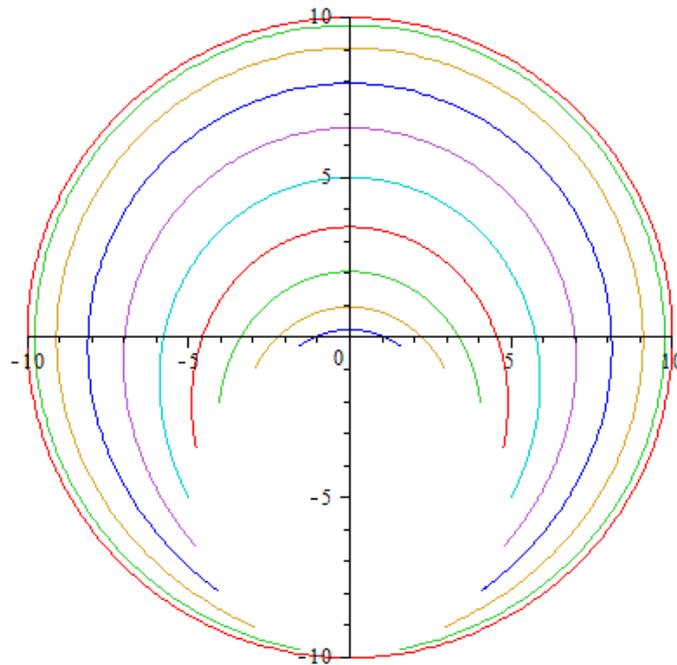


```
> plot([seq([vz,ax,t=0..T],phi0=seq(Pi/10*i,i=0..9)),scaling=constrained);
```



Fehlt noch etwas?

Ach ja - vielleicht noch ein ax-az-Diagramm zum harmonischen Ausklang...



Wie viele Phasendiagramme fehlen jetzt noch?

Und die Moral von der Geschichte? Kaum vorstellbar, was Huygens alles gewusst hätte, wenn er Maple und ein Auto gehabt hätte! Etwas ernsthafter bitte?

"Harmonische Schwingung" bedeutet im normalen Sprachgebrauch, dass sich die Auslenkung als Sinus/Cosinus-Funktion darstellen lässt. Dies ist der Fall, wenn für die Schwingung das lineare Kraftgesetz (quadratisches Potential) gilt. Daraus folgt dann, dass die Schwingungsdauer einer harmonischen Schwingung nicht von der Amplitude abhängt.

Folgende "Umkehrschlüsse" sind falsch:

1. Was isochron schwingt, schwingt harmonisch.
2. Was sich so parametrisieren lässt, dass es "der Schwingungsgleichung gehorcht", schwingt harmonisch. Und natürlich:
3. Was sich im Schwerfeld auf einer Parabelbahn (= "quadratisches Potential"???) bewegt, schwingt harmonisch.

© M. Komma 01/2011

Ja, ich weiß: Man könnte die Achsen der Diagramme auch beschriften. Für die html-Ausgabe von Maple bin ich aber wirklich nicht verantwortlich...

Methode: Aufstellen der Differentialgleichungen mit Lagrange (2. Art) und Maple. Lösung der Differentialgleichungen mit Maple, siehe auch "[Newtons Maschine](#)". Die Differentialgleichung für die Zykloide lässt sich geschlossen lösen.

Siehe auch:

[Kreispendedel](#)

[Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerfeld](#)

Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)

Paulfalle, [Standard](#)

Paulfalle, [Mechanisches Analogon](#) | Paulfalle, Mechanisches Analogon, [Details](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

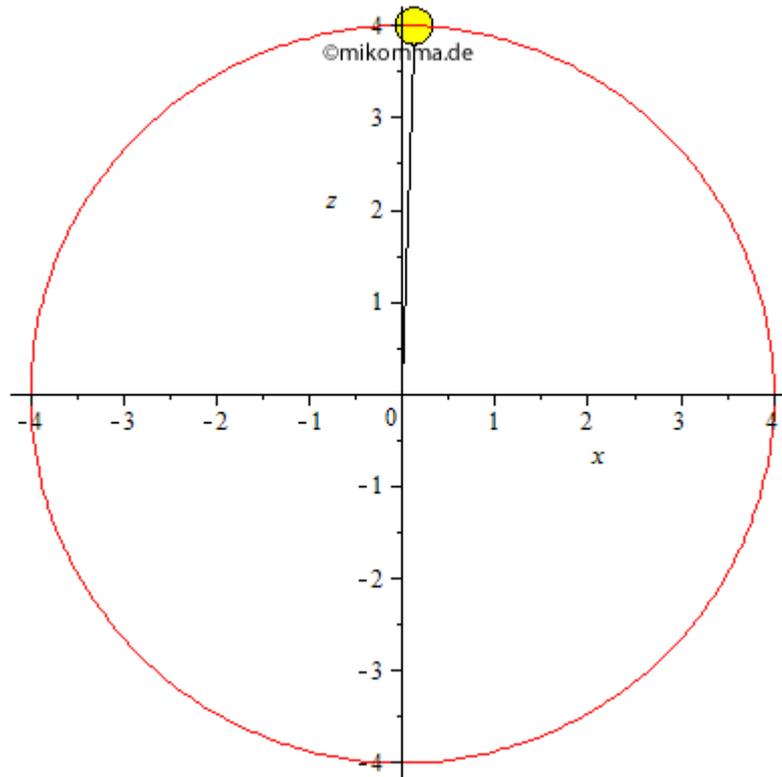
[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Kreispendel

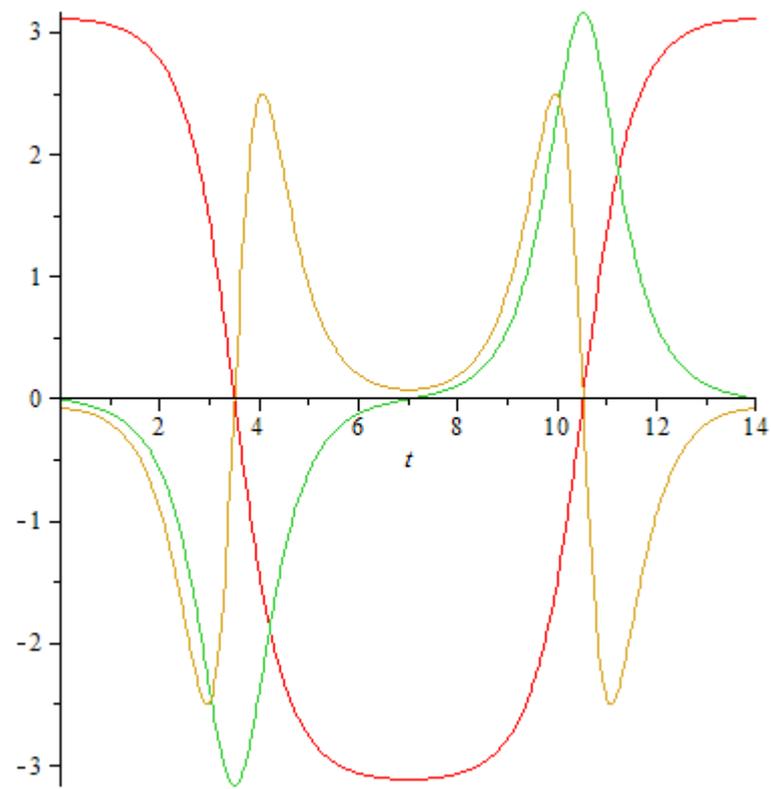


Zum Kreispendel sagt man manchmal auch "ebenes mathematisches Pendel" und meint damit eine punktförmige Masse, die sich reibungsfrei auf einem Kreis bewegt, der im Schwerfeld "senkrecht steht" (siehe oben). Manchmal ist damit auch ein Fadenpendel gemeint, dessen punktförmige Masse sich auf einem horizontalen Kreis bewegt (wozu man meistens "Kegelpendel" sagt).

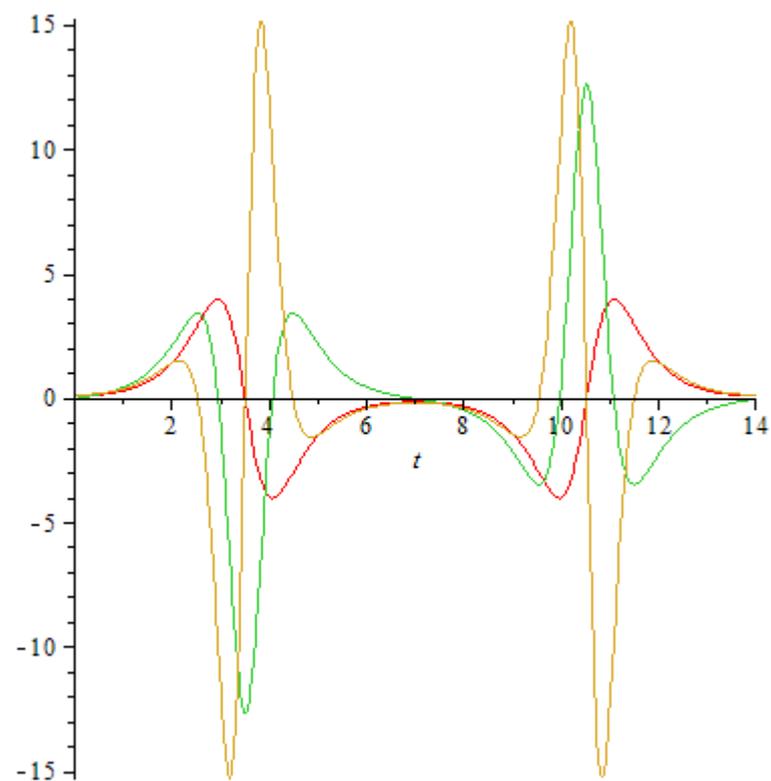
Die Differentialgleichung des hier behandelten Kreispendels lautet

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = -\frac{g \sin(\phi(t))}{R} \quad (1)$$

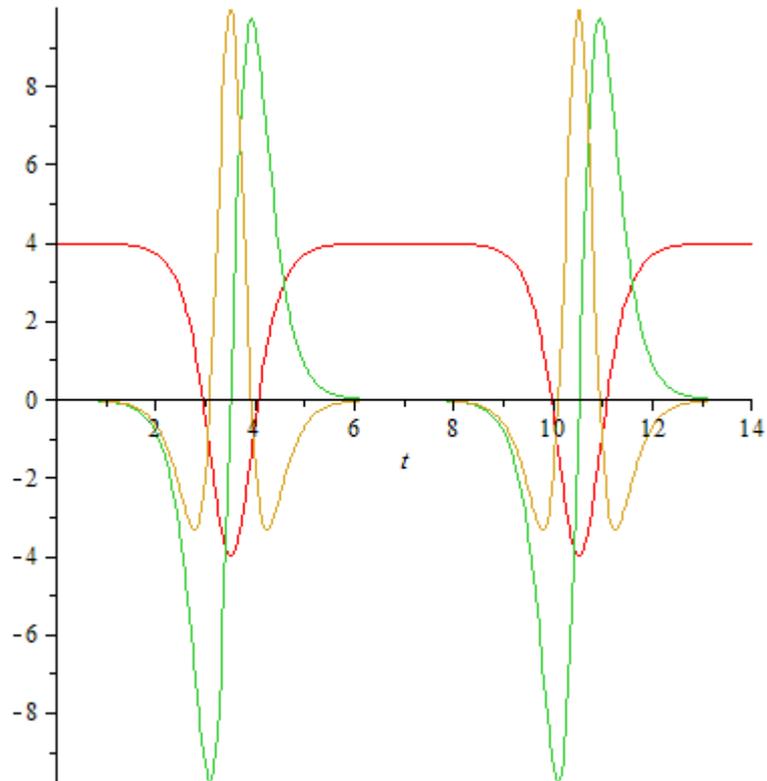
und ist leider nur numerisch lösbar. Das nächste Diagramm zeigt den Winkel, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung als Funktionen der Zeit und mit den Anfangswerten obiger Animation: Startwinkel =  $0.99 \pi$  (oben rechts), Startgeschwindigkeit = 0. Welche Kurve gehört zu welcher Größe?



Die x-Koordinate, die x-Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung, wobei die Werte der Beschleunigung halbiert sind, also  $x$ ,  $v_x$ ,  $a_x/2$ :



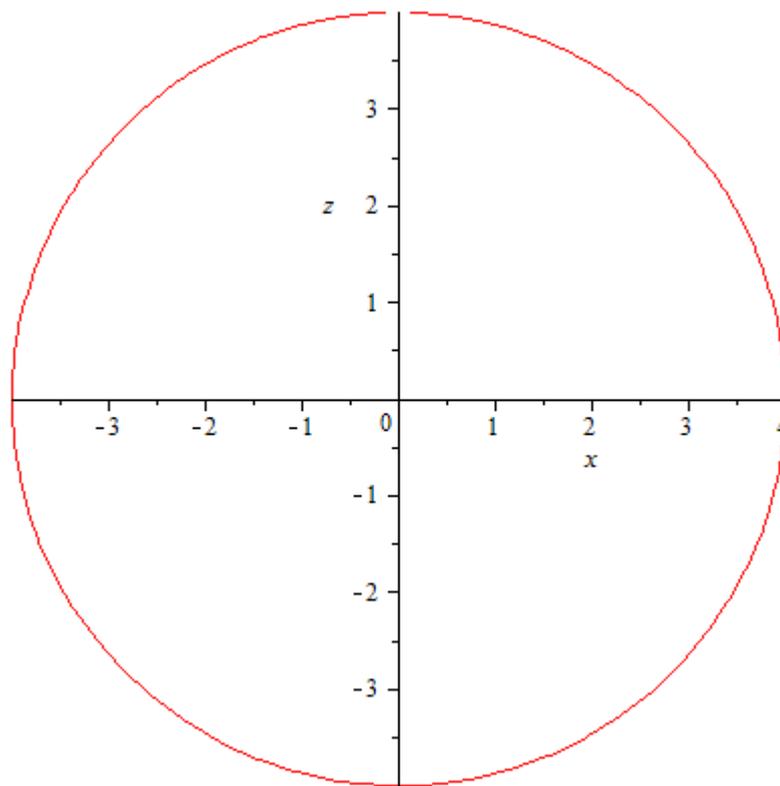
Ebenso  $z$ ,  $v_z$ ,  $az/4$ :



Welche Beschleunigung erfährt die Masse im tiefsten Punkt? Stimmt die maximale Geschwindigkeit?

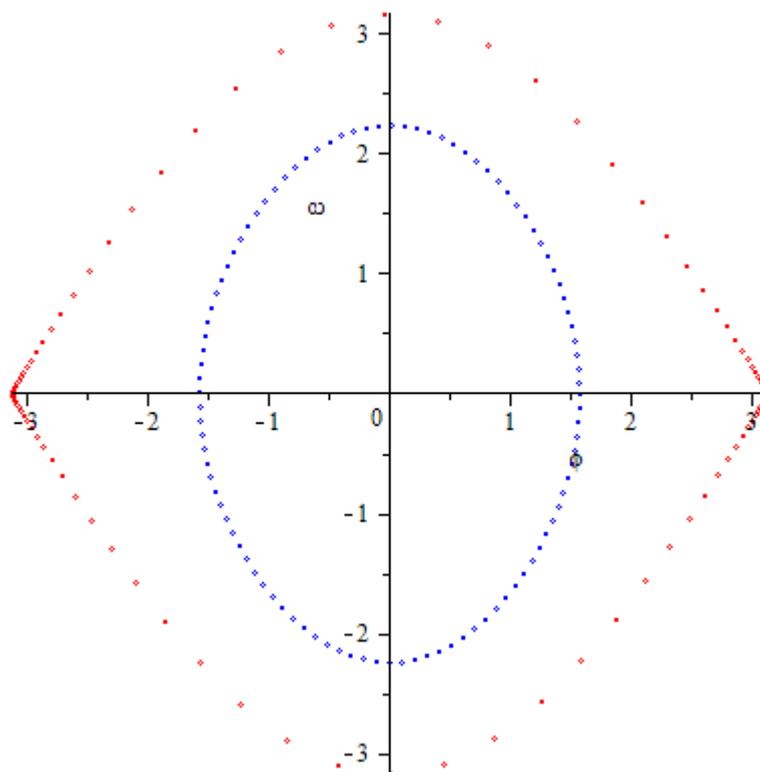
## Phasendiagramme

Zuerst die "ganz normale Bahn", also  $z(t)$  über  $x(t)$ , als Probe



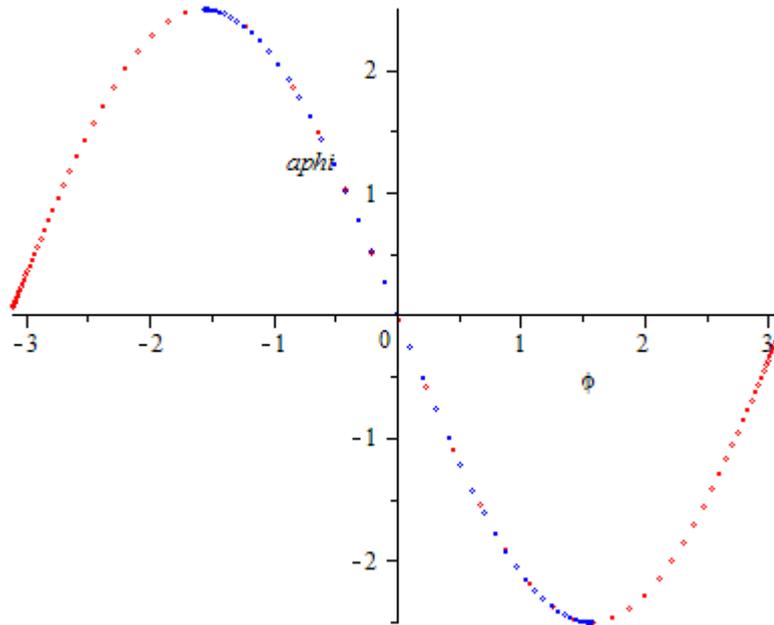
Phasendiagramme periodischer Bewegungen sind immer geschlossene Kurven. Weshalb ist dann der Kreis oben nicht ganz geschlossen?

Die Winkelgeschwindigkeit über dem Winkel:



Damit man sich den Ablauf der "Bewegung" besser vorstellen kann, sind Punkte in gleichen Zeitschritten dargestellt. Die blaue "Bahn" gehört zum Startwinkel  $90^\circ$ . Obwohl die Bewegung für den (fast) vollen Startwinkel stark anharmonisch ist, ergibt sich eine cosinusförmige Kurve. Es gilt hier aber: Je harmonischer die Schwingung, desto ellipsenförmiger das Phasendiagramm.

Winkelbeschleunigung über Winkel:

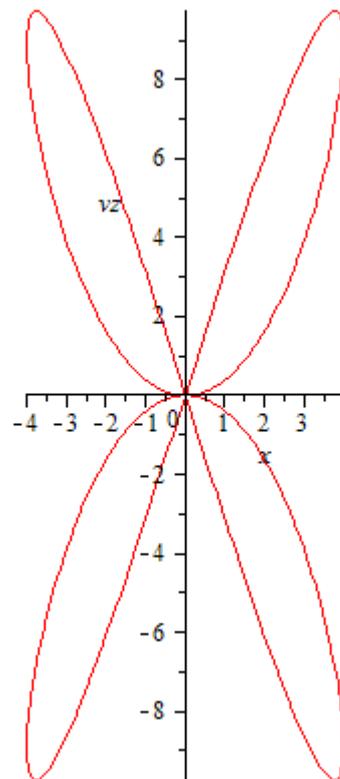
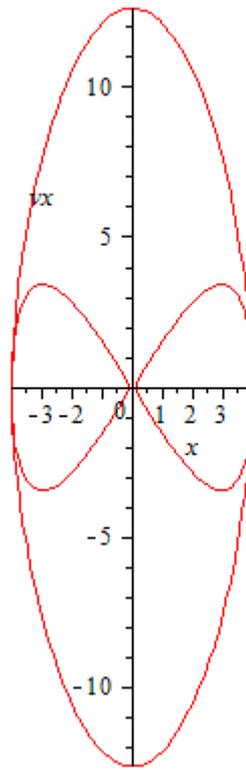


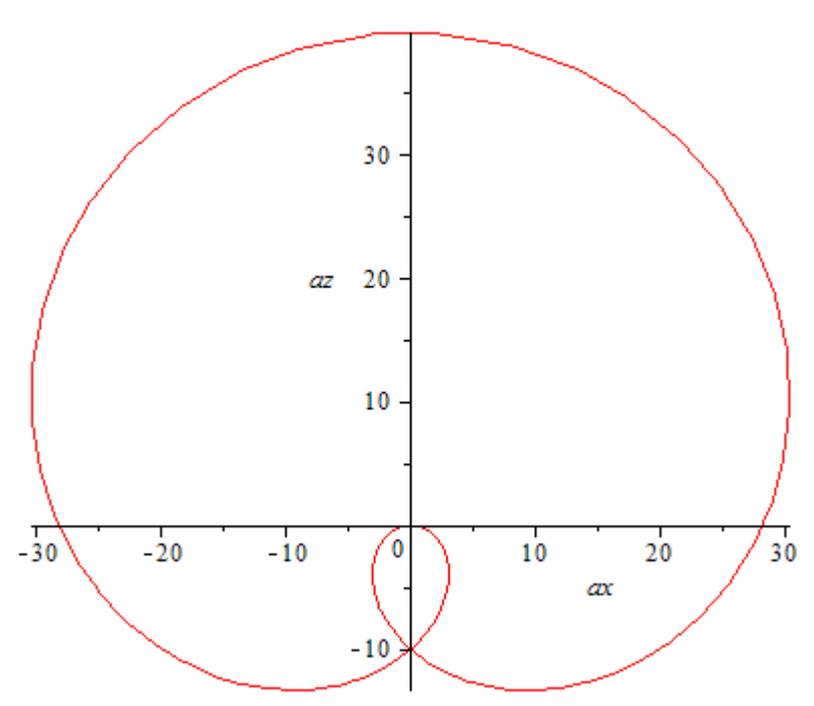
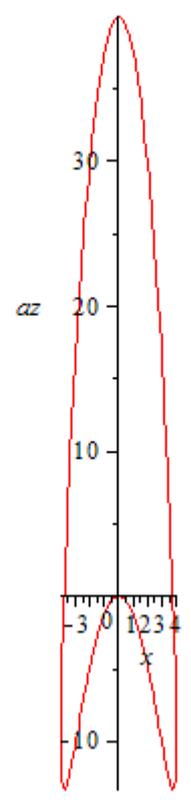
Wer hätte das gedacht: ein "Minus-Sinus"! Wie es ja die Differentialgleichung verlangt ( $g = 10$ ,  $R = 4$ , MKS (z.B.)).

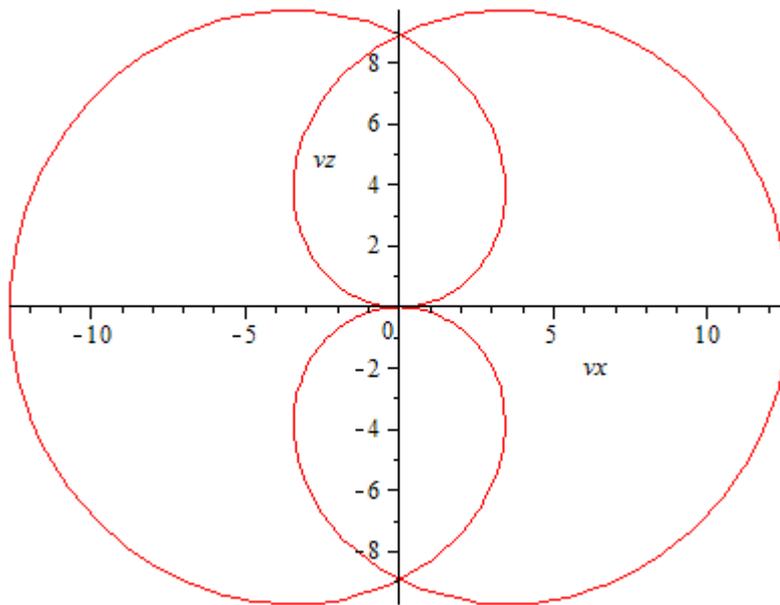
Aber das heißt wieder nicht, dass die Schwingung harmonisch ist, vielmehr gilt hier: Je harmonischer die Schwingung, desto linearer das Phasendiagramm.

Man beachte auch: In Phasendiagrammen ist "die Kurve der Beschleunigung" nicht einfach die geometrische Ableitung der Geschwindigkeitskurve.

Weitere Übungen zum Lesen von Phasendiagrammen. Die Achsen sind ausnahmsweise beschriftet. Wo liegt der Start- und Endpunkt der Phasenbahnen? In welchem Sinn werden sie durchlaufen? Mit welcher Geschwindigkeit?

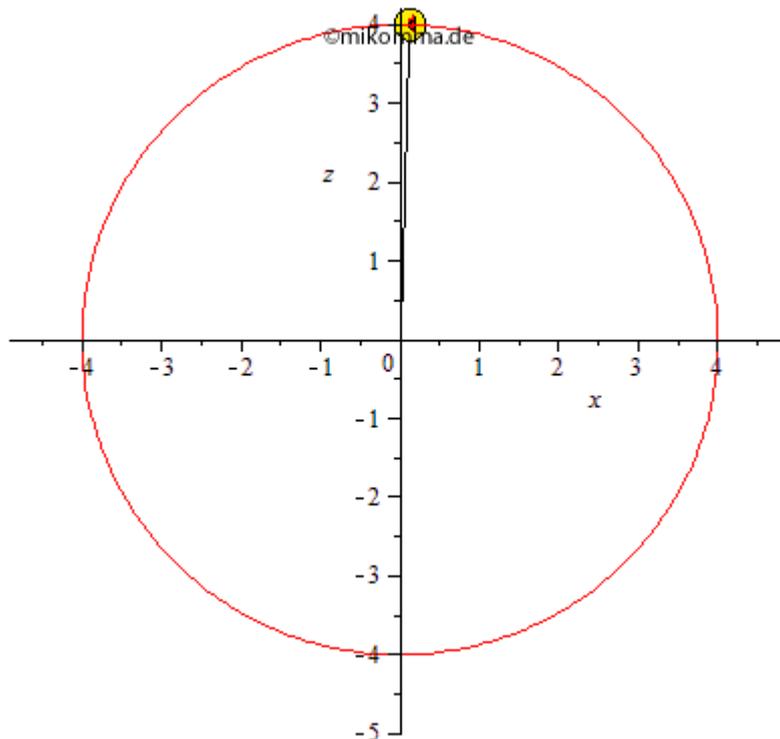






Aber bitte mit Pfeilen!

Grün: **Geschwindigkeit**, blau: **Zentripetalbeschleunigung**, rot: **Gesamtbeschleunigung**.



Wer nachrechnen will: Der Geschwindigkeitspfeil ist mit einem Viertel seiner Länge und die Beschleunigungspfeile mit einem Fünftel dargestellt (MKS-Einheiten, man vergleiche mit den Angaben und Diagrammen oben).

Diese Bewegung kann mit einem Stangenpendel (masselose Stange ohne Reibung drehbar um eine horizontale Achse) "realisiert" werden.

Nimmt man ein Fadenpendel oder eine Loopingbahn, in der die Kugel (besser: punktförmige Masse) innen gleitet, so "stürzt sie ab", wenn sie mit der hier vorgegebenen Geschwindigkeit unten startet. Wo passiert das?

Lässt man umgekehrt eine Kugel auf einem Kreiszyylinder außen herabgleiten (von fast ganz oben), so "hebt sie ab". Wo?

Und wie würde das alles aussehen, wenn das Pendel den Überschlag schafft (siehe auch...)?

Oder der Innenlooping ohne Absturz klappt?

"Technische Anmerkung": In der Nähe des oberen Totpunktes wackelt eventuell die Gerade (vom Ursprung/Zentrum zum Pendelkörper). Es ist eben nicht ganz einfach, eine *fast* senkrechte Gerade auf den Bildschirm zu bringen. Beim Export von MAPLE nach GIF (und nachfolgender Kompression) wird außerdem das *Antialiasing* abgeschaltet. Und dann reagiert noch der eine *Browser* so und der andere so. Oder wie wäre es mit einer neuen *Graphikkarte*?

© M. Komma 01/2011

Für die html-Ausgabe von Maple bin ich nicht verantwortlich...

Methode: Numerische Lösung der Differentialgleichung mit Maple, siehe auch "[Newtons Maschine](#)".

Siehe auch:

[Überschlag](#)

[Mathematisches Pendel](#)

[Kugelpendel](#)

[Zykloidenpendel](#)

[Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerfeld](#)

Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)

Paulfalle, [Standard](#)

Paulfalle, [Mechanisches Analogon](#) | Paulfalle, Mechanisches Analogon, [Details](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Das mathematische Pendel

Oder das Märchen von "exakten Lösungen"

Manchmal werden "exakte Lösungen" für das "mathematische Pendel" angeboten. Dies erweckt den falschen Eindruck, dass man nicht auf numerische Verfahren angewiesen ist, um die Schwingungsdauer eines Pendels im Schwerfeld oder gar den gesamten Ablauf der Bewegung für beliebige Auslenkungen zu berechnen.

Wie kommt es zu diesem Märchen?

Die Bewegung des Pendels lässt sich mit elliptischen Integralen "exakt" beschreiben. Leider lässt sich aber der Umfang einer Ellipse nicht exakt berechnen (noch weniger exakt als der Kreisumfang, für den man wenigstens eine einfache Formel hat... :-).

Wir untersuchen das einmal mit einem kleinen Maple-Worksheet:

Für die Schwingungsdauer  $T$  gilt:

```
> T:=4/omega[0]*EllipticK(sin(phi[0]/2));
```

$$T := \frac{4 \operatorname{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)}{\omega_0} \quad (1)$$

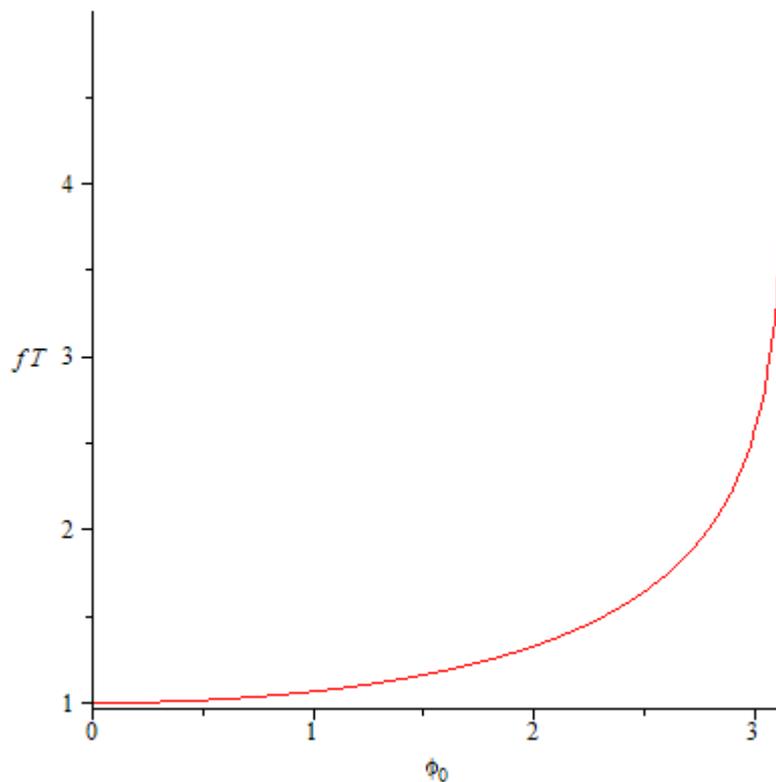
Dabei ist  $\omega_0$  die Kreisfrequenz für kleine Auslenkungen und  $\Phi_0$  der Ausschlag des Pendels.

*EllipticK* ist das vollständige elliptische Integral 1. Art, siehe z.B.

<http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=EllipticF>

Der erste Vorteil dieser "exakten Beschreibung" ist, dass man sich z.B. die Schwingungsdauer als Funktion der Auslenkung zeichnen lassen kann (als Vielfaches der Schwingungsdauer für kleine Auslenkungen).

```
> plot(omega*T/(2*Pi),phi[0]=0..0.999*Pi,labels=[phi[0],'f*T']);
```



Aber natürlich geht das nur mit einer numerischen Näherung, siehe z.B.

[www.nag.co.uk/numeric/fl/manual/pdf/S/s21bbf.pdf](http://www.nag.co.uk/numeric/fl/manual/pdf/S/s21bbf.pdf)

Jedenfalls sieht man nun, dass die Schwingungsdauer des Pendels beliebig groß werden kann.

Der zweite Vorteil ist, dass es eine Reihenentwicklung für *EllipticK* gibt:

```
> 'T'=series(T,phi[0],10);
```

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{1}{8} \frac{\pi}{\omega_0} \phi_0^2 + \frac{11}{1536} \frac{\pi}{\omega_0} \phi_0^4 + \frac{173}{368640} \frac{\pi}{\omega_0} \phi_0^6 + \frac{22931}{660602880} \frac{\pi}{\omega_0} \phi_0^8 + \mathcal{O}(\phi_0^{10}) \quad (2)$$

Man kann die Symbolik aber noch weiter treiben:

Für den Winkel als Funktion der Zeit erhält man

```
> phi=2*arcsin(sin(phi[0]/2)*JacobiSN(omega[0]*t+omega[0]*T/4, sin(phi[0]/2)));
```

$$\phi = 2 \arcsin \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \text{JacobiSN} \left( \omega_0 t + \text{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right) \right) \quad (3)$$

Zu *JacobiSN* siehe z.B.

<http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=JacobiAM>

Die elliptischen Integrale sind sogar so benutzerfreundlich, dass man sie ableiten kann, also

Winkelgeschwindigkeit:

```
> omega=diff(rhs(%),t);
```

$$\omega = \frac{\left( 2 \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \omega_0 \text{JacobiCN} \left( \omega_0 t + \text{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right) \right) \text{JacobiDN} \left( \omega_0 t + \text{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)}{\sqrt{1 - \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right)^2 \text{JacobiSN} \left( \omega_0 t + \text{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)^2}} \quad (4)$$

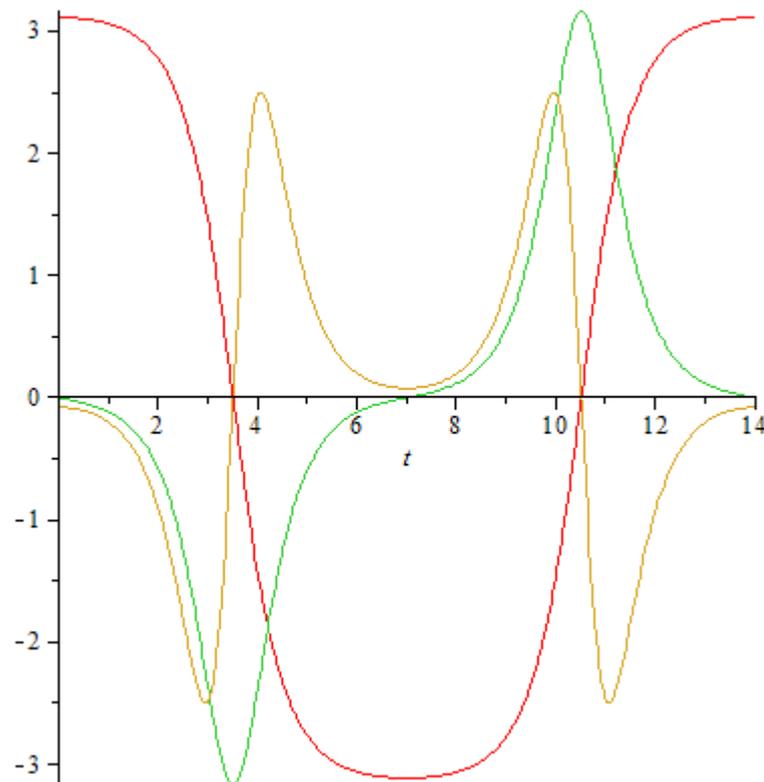
Winkelbeschleunigung:

```
> aphi=diff(rhs(%),t);
```

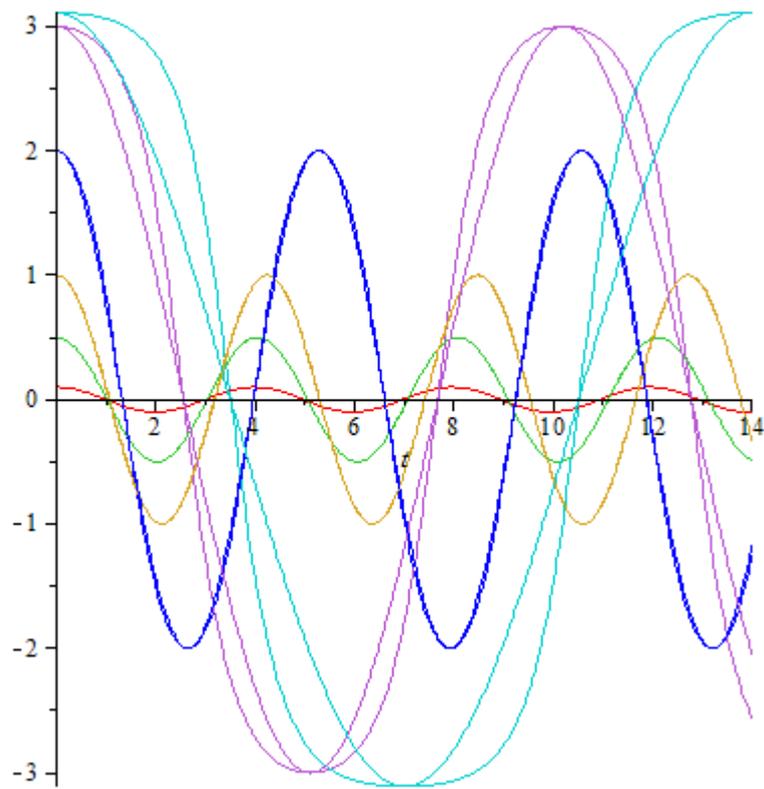
$$a\phi = - \frac{\left( 2 \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \omega_0^2 \text{JacobiDN} \left( \omega_0 t + \text{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right) \right) \text{JacobiSN} \left( \omega_0 t + \text{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)}{\sqrt{1 - \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right)^2 \text{JacobiSN} \left( \omega_0 t + \text{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( 2 \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)^3 \omega_0^2 \operatorname{JacobiCN} \left( \omega_0 t + \operatorname{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)^2 \operatorname{JacobiSN} \\
 & \sqrt{1 - \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right)^2} \operatorname{JacobiSN} \left( \omega_0 t + \operatorname{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)^2 \\
 & \operatorname{JacobiSN} \left( \omega_0 t + \operatorname{EllipticK} \left( \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right), \sin \left( \frac{1}{2} \phi_0 \right) \right)^2
 \end{aligned}$$

Damit erhält man die gleichen Kurven wie mit der numerischen Lösung der Bewegungsgleichung (die Numerik wurde nur in die numerische Integration der elliptischen Integrale verschoben, was leider auch mit guten NAG-Algorithmien um einiges länger dauert).

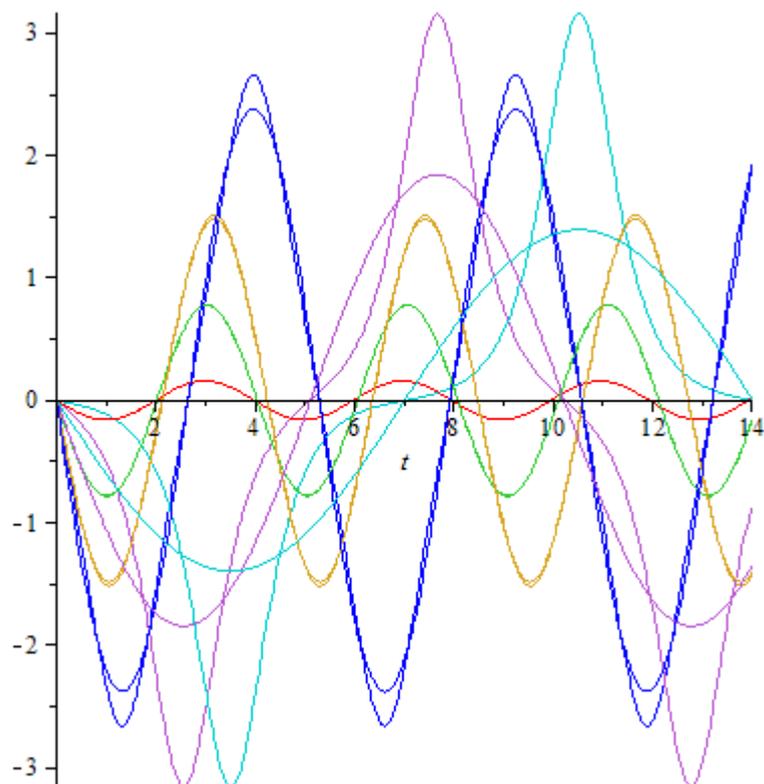


Aber diese "exakten Lösungen" sind wirklich praktisch! Man kann sich z.B. mit wenig Aufwand ansehen, wie die Schwingung für verschiedene Auslenkungen aussieht:

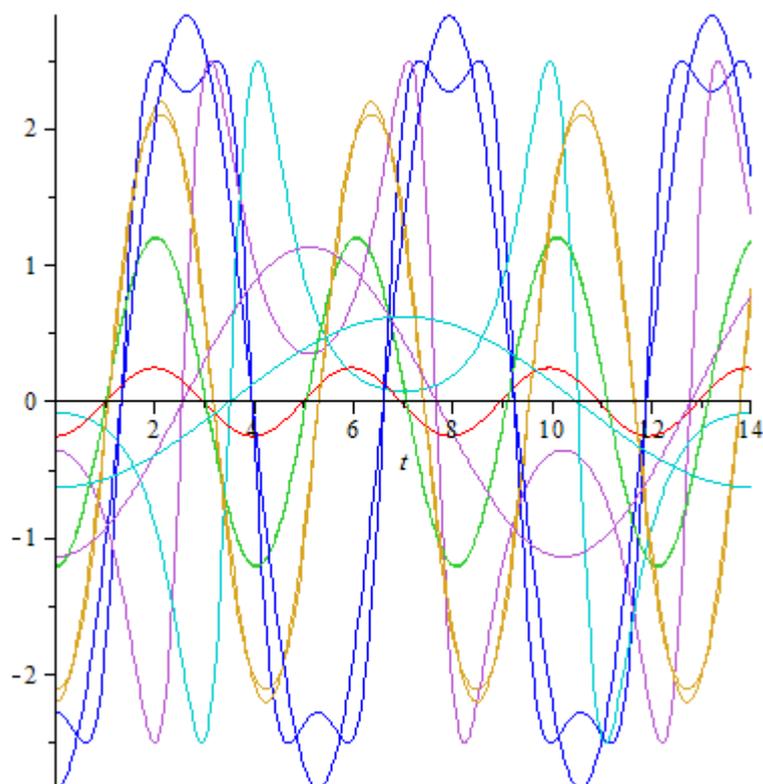


Für jede Auslenkung (abzulesen an der Hochachse in Radiant) ist eine Cosinuskurve mit gleicher Schwingungsdauer (und Farbe) eingetragen. Erst bei der dunkelblauen Kurve ist eine minimale Abweichung zu sehen. Also schwingt das "mathematische Pendel" doch auch für große Ausschläge "exakt harmonisch"?

Nun ja - wir wissen, dass Synthesizer Sinuskurven aus Parabelbögen zusammensetzen und dieser Trick auffliegt, wenn man gute Ohren hat oder sich mit einem Oszilloskop die Ableitung(en) ansieht. Hier z.B. die Winkelgeschwindigkeit:



Spätestens bei der Winkelbeschleunigung wird es wirklich unharmonisch:



Und die Moral von der Geschichte? Traue "exakten Lösungen" und "Sinuskurven" nicht!

© M. Komma 01/2011

Für die html-Ausgabe von Maple bin ich nicht verantwortlich...

Methode: Für das mathematische Pendel liefert der Energieerhaltungssatz (in Polarkoordinaten) eine Differentialgleichung 1. Ordnung für den Winkel als Funktion der Zeit. Die Lösung dieser DG kann mit elliptischen Integralen dargestellt werden. Zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichung (DG 2. Ordnung) siehe auch "[Newtons Maschine](#)".

Siehe auch:

[Kreispiegel](#)

[Kugelpendel](#)

[Zykloidenpendel](#)

[Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerfeld](#)

Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)

Paulfalle, [Standard](#)

Paulfalle, [Mechanisches Analogon](#) | Paulfalle, Mechanisches Analogon, [Details](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

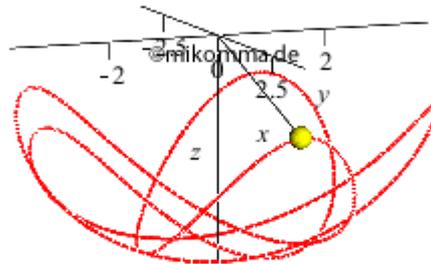
[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## Kugelpendel, sphärisches Pendel



Zum Kugelpendel sagt man meistens "sphärisches Pendel" und meint damit eine punktförmige Masse, die sich reibungsfrei im Schwerfeld auf einer Kugel bewegt. Es geht hier also nicht um das Stoßpendel mit Kugeln.

Die Bewegungsgleichungen sphärischen Pendels lauten (in Kugelkoordinaten):

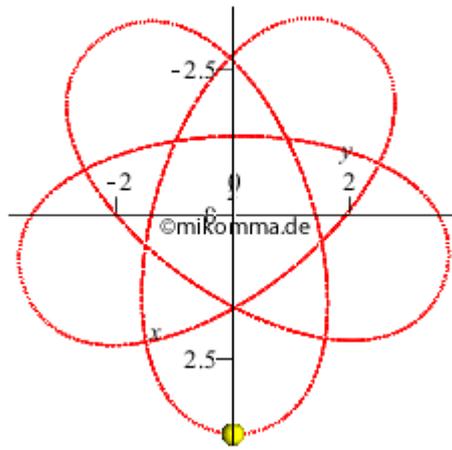
$$2 \sin(\theta(t)) \left( \frac{d}{dt} \phi(t) \right) \cos(\theta(t)) \left( \frac{d}{dt} \theta(t) \right) + \sin(\theta(t))^2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) - \left( \frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) - \frac{g \sin(\theta(t))}{R} = 0$$

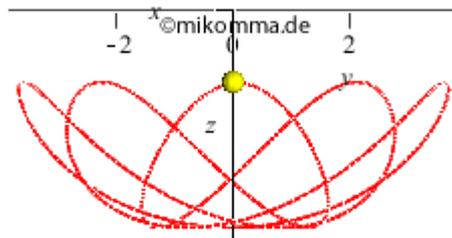
Wie beim ebenen Kreispendel gibt es natürlich auch hier nur numerische Lösungen.

Wenn man die Anfangsbedingungen geeignet wählt, ergibt sich eine geschlossene Bahn (wie oben), die je nach Blickrichtung unterschiedlich aussieht.

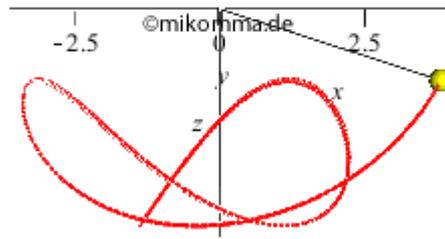
Von oben (der Faden ist wirklich immer gleich lang):



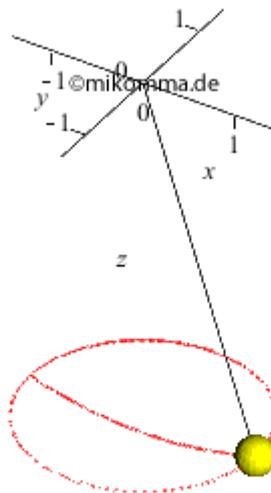
In x-Richtung:



In y-Richtung:

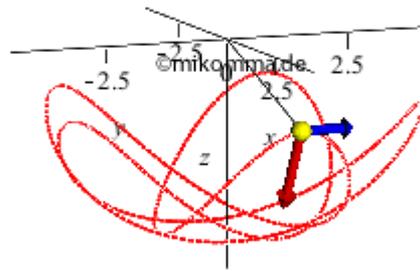


Geschlossene Bahnen sind natürlich Sonderfälle. Hier sind noch zwei besondere Sonderfälle:

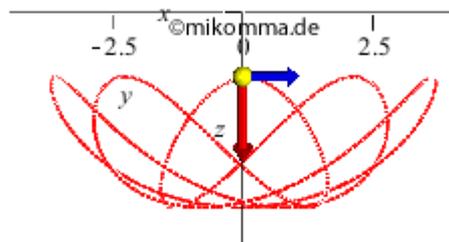


Das ebene Kreispendel und das Kegelpendel schwingen bei nicht zu großer Auslenkung praktisch synchron.

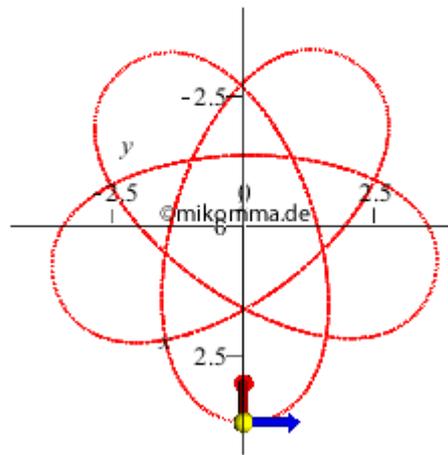
Aber bitte mit Pfeilen! Und etwas langsamer als oben (80 statt 60 Bilder).



Was die Pfeile wohl bedeuten? Sieht man es so besser?



Oder so?



© M. Komma 01/2011

Für die html-Ausgabe von Maple bin ich nicht verantwortlich...

Methode: Numerische Lösung der Differentialgleichungen mit Maple, siehe auch "[Newtons Maschine](#)".

Siehe auch:

Kugelpendel, [Details](#)

[Kreispendel](#)

[Überschlag](#)

[Mathematisches Pendel](#)

[Zykloidenpendel](#)

[Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerfeld](#)

Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)

Paulfalle, [Standard](#)

Paulfalle, [Mechanisches Analogon](#) | Paulfalle, Mechanisches Analogon, [Details](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

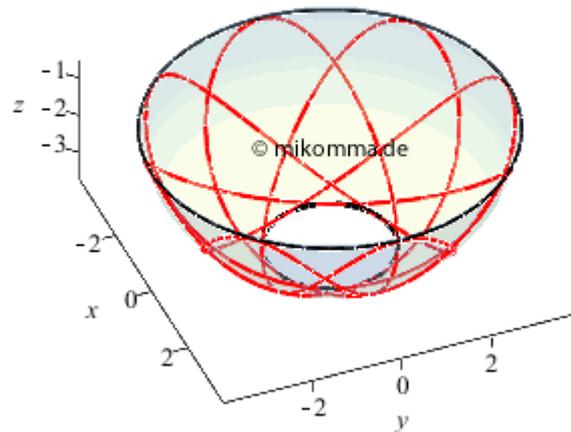
[Quantenphysik](#)

[Top](#)

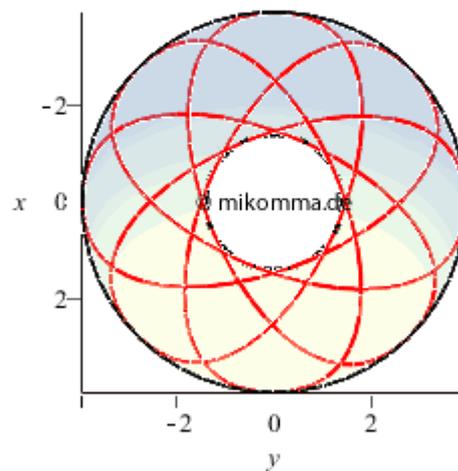
## Kugelpendel (sphärisches Pendel), Details

Auszüge aus einem Maple-Worksheet

Wir betrachten wieder den Sonderfall einer geschlossenen Bahn, der nur dann eintritt, wenn die Anfangsbedingungen passend gewählt sind (was nur numerisch berechnet werden kann -> elliptische Integrale).



Das Pendel bewegt sich zwischen zwei Breitenkreisen (schwarz), die durch die Energie- und Drehimpulserhaltung vorgegeben sind. Im "Normalfall" der nicht geschlossenen Bahn wird jeder Punkt zwischen diesen Breitenkreisen irgendwann einmal erreicht (vgl. Lissajous-Figuren).

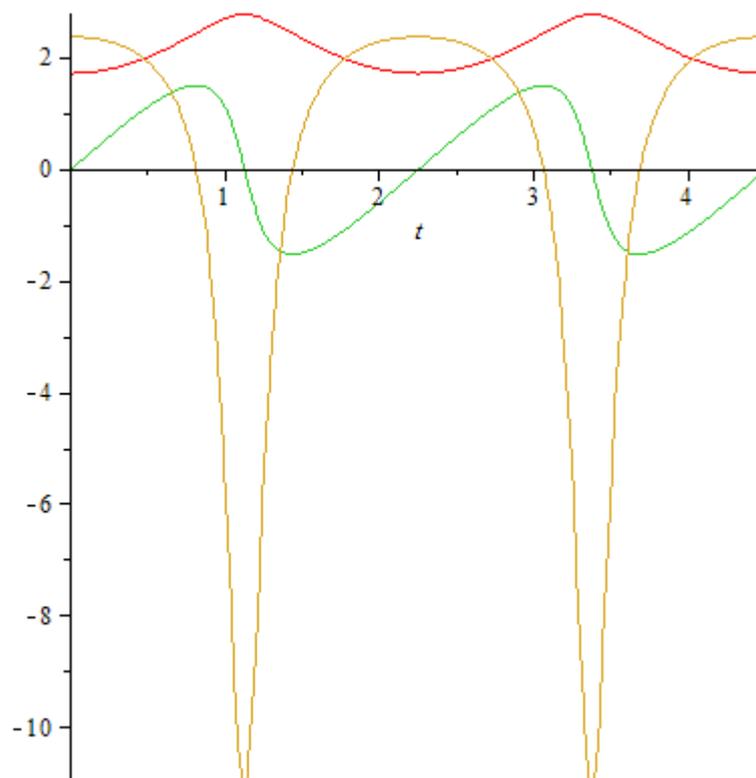


Die Einzelheiten der Bewegung lassen sich an folgenden Diagrammen ablesen.

## Kugelkoordinaten

Polarwinkel (rot), Winkelgeschwindigkeit (grün) und Winkelbeschleunigung (goldbraun) als Funktion der Zeit.

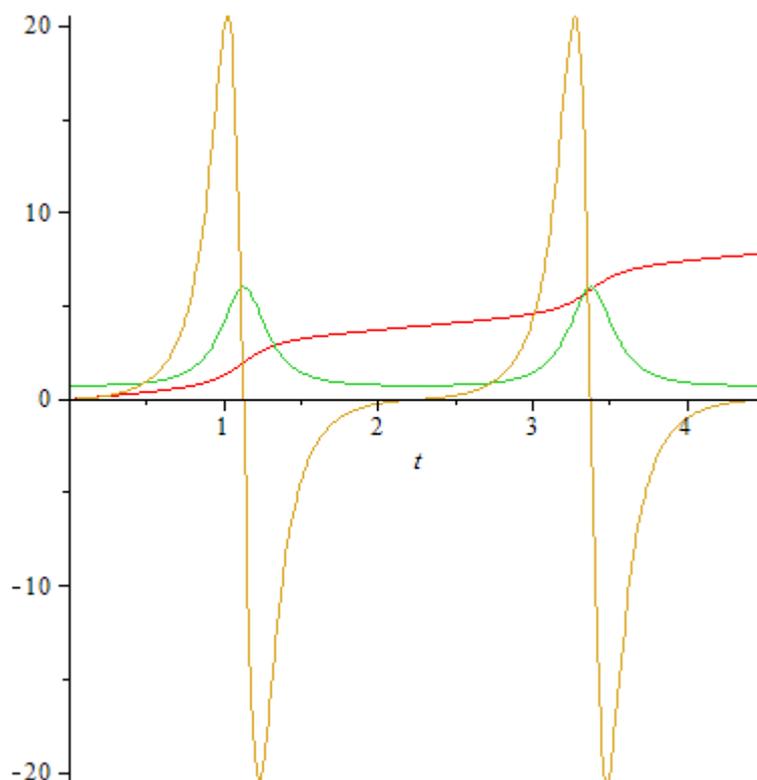
```
> plot([tht(t),omtht(t),ath(t)],t=0..4.5);
```



Achtung: Der Polarwinkel wird von oben (Nordpol) gemessen, die Maxima der roten Kurve gehören also zur tiefsten Lage (unterer Breitenkreis) des Pendels. Dass die polare Winkelgeschwindigkeit dort Null wird, bedeutet nicht, dass das Pendel stillsteht; vielmehr macht in dieser Lage eine reine Drehbewegung um die senkrechte Achse:

### Azimut

```
> plot([pht(t),omt(t),aph(t)],t=0..4.5);
```

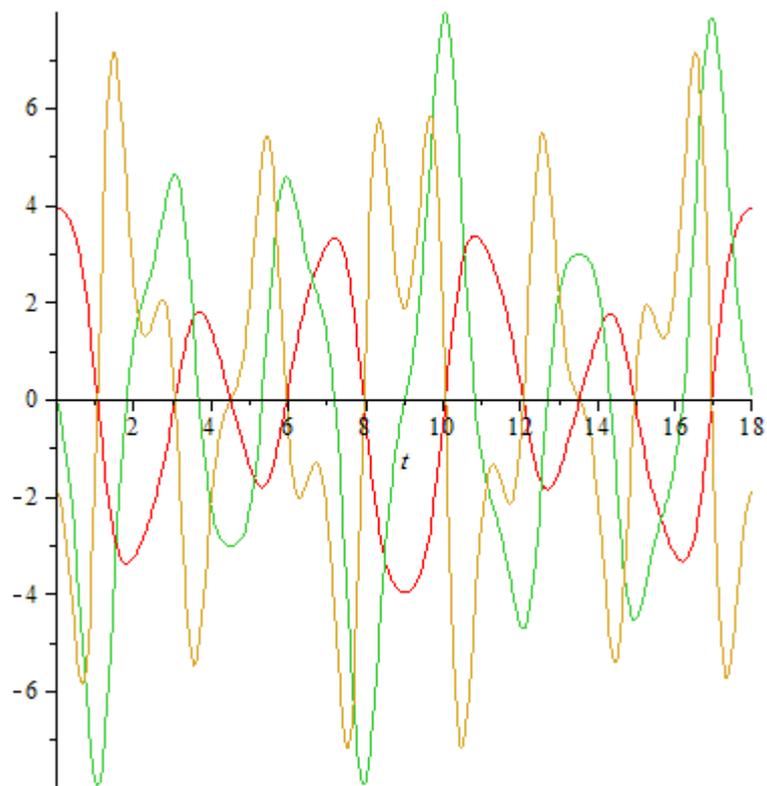


Nach einer vollen "polaren Periode" (die höchste Lage wird zum zweiten Mal wieder erreicht), ist die azimutale Präzession 1/4 Umdrehung. Die azimutale Winkelgeschwindigkeit muss wegen der Drehimpulserhaltung zunehmen, wenn sich das Pendel der vertikalen Drehachse nähert und wieder abnehmen, wenn es sich entfernt.

### **Kartesische Koordinaten**

x-Koordinate, Geschwindigkeit und Beschleunigung in x-Richtung

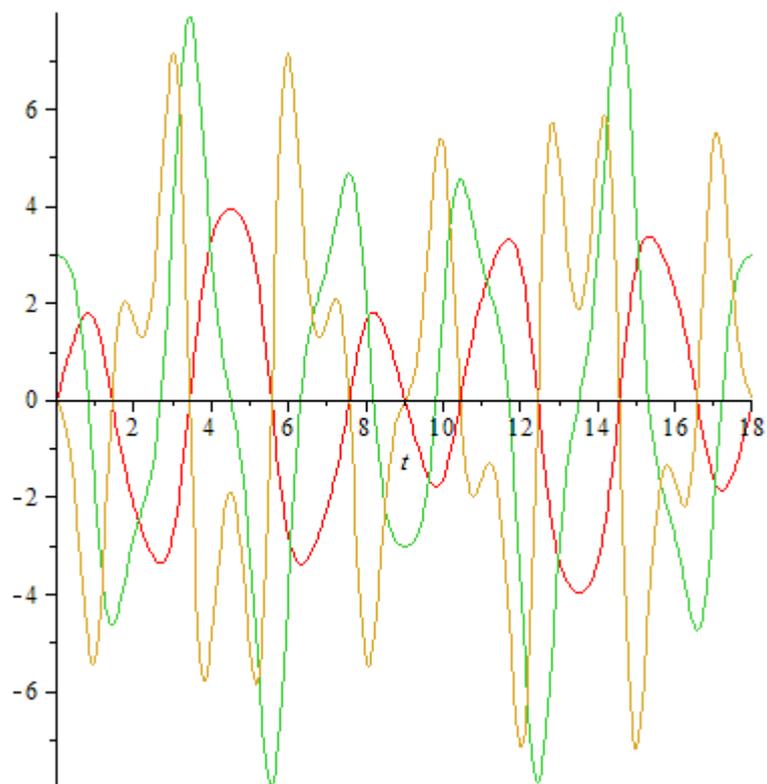
```
> plot([x,vx,ax/2],t=0..18);
```



Die Diagramme sind nun etwas komplexer, dafür sieht man die volle Periode der geschlossenen Bahn besser.

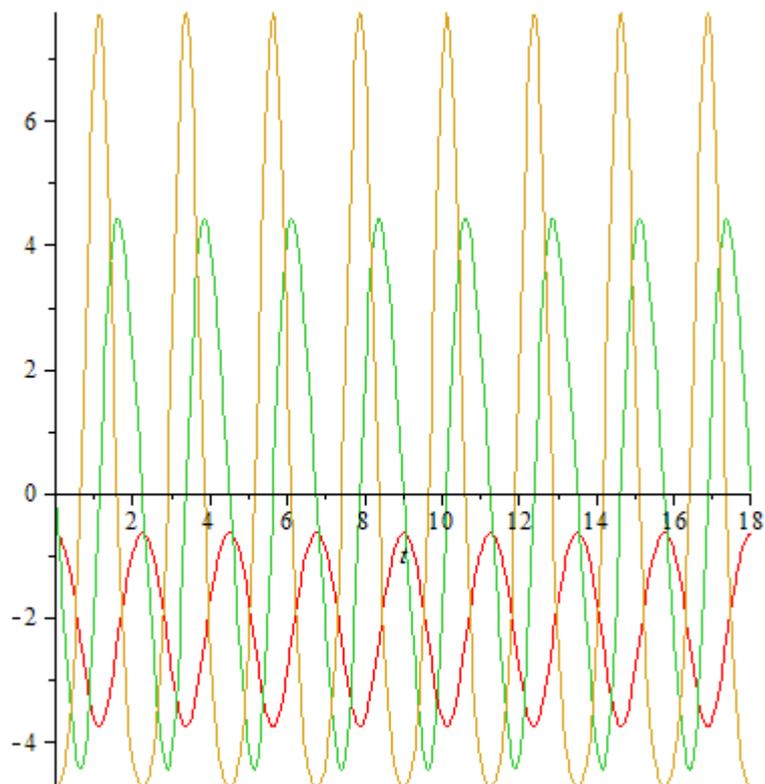
Bewegung in y-Richtung:

```
> plot([y,vy,ay/2],t=0..18);
```



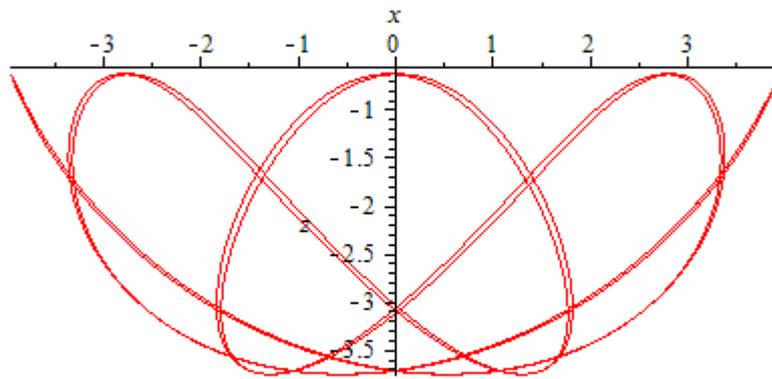
Am einfachsten sind die Verhältnisse bei der Bewegung in z-Richtung: fast harmonisch.

```
> plot([z,vz,az/2],t=0..18);
```

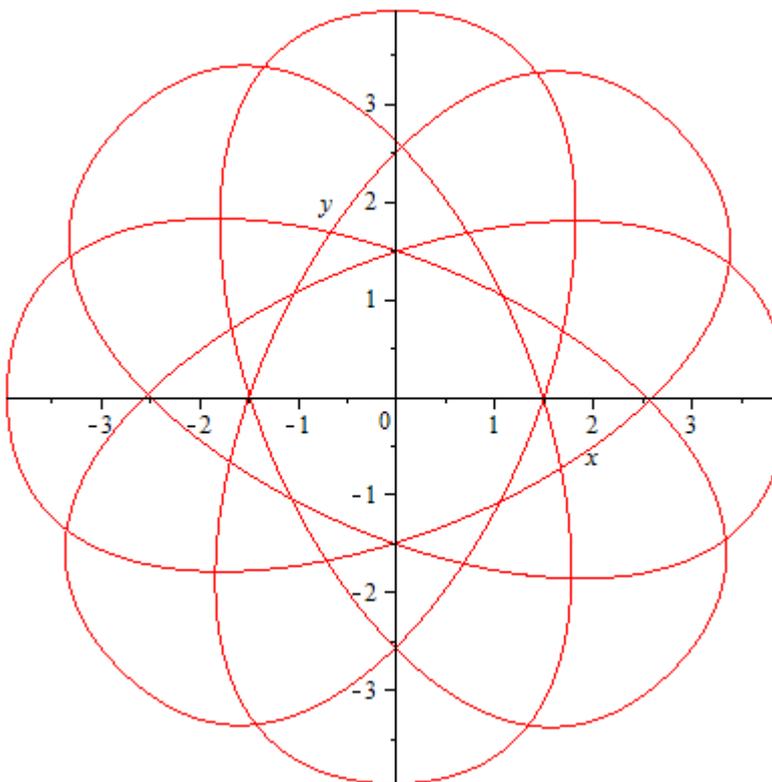


Weitere Phasendiagramme (v steht für Geschwindigkeit, a für Beschleunigung):

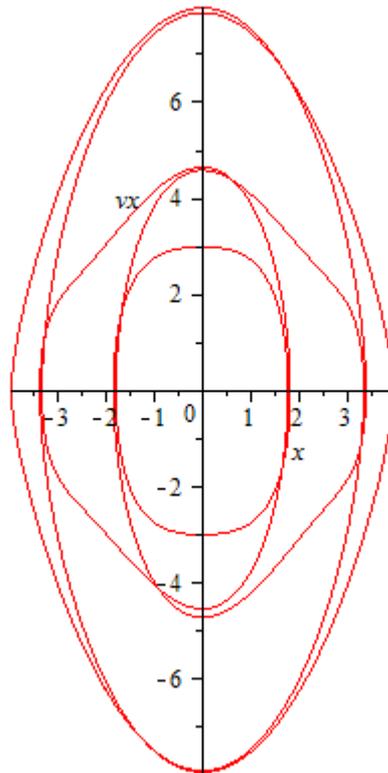
```
> plot([x,z,t=0..18],labels=['x','z'],scaling=constrained);
```



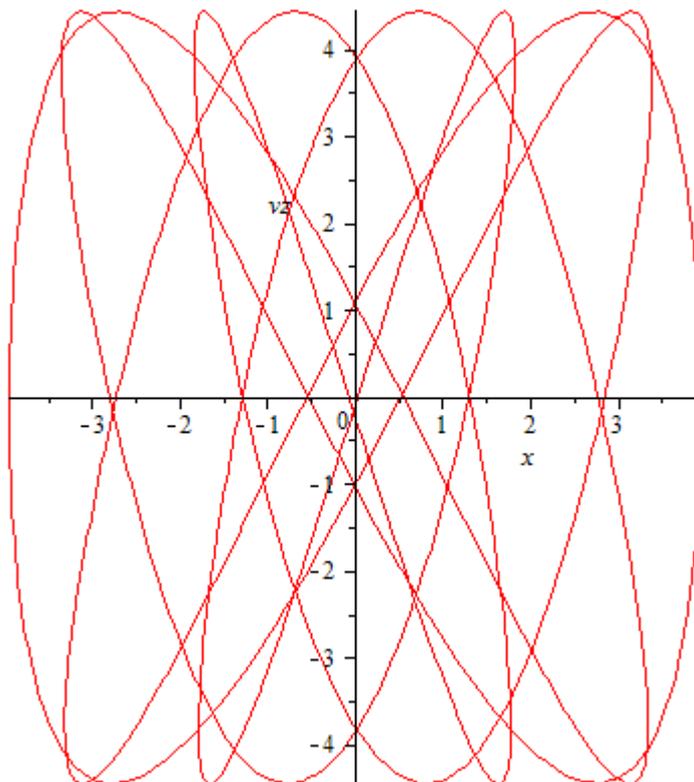
```
> plot([x,y,t=0..18],labels=['x','y'],scaling=constrained);
```



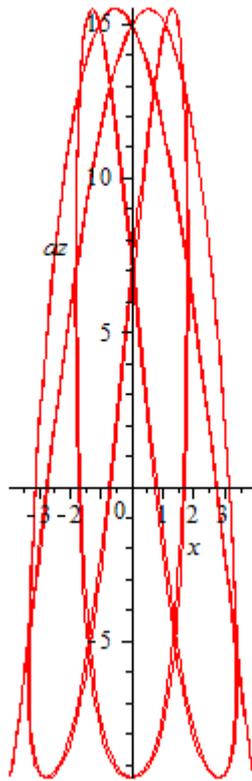
```
> plot([x,vx,t=0..18],labels=['x','vx'],scaling=constrained);
```



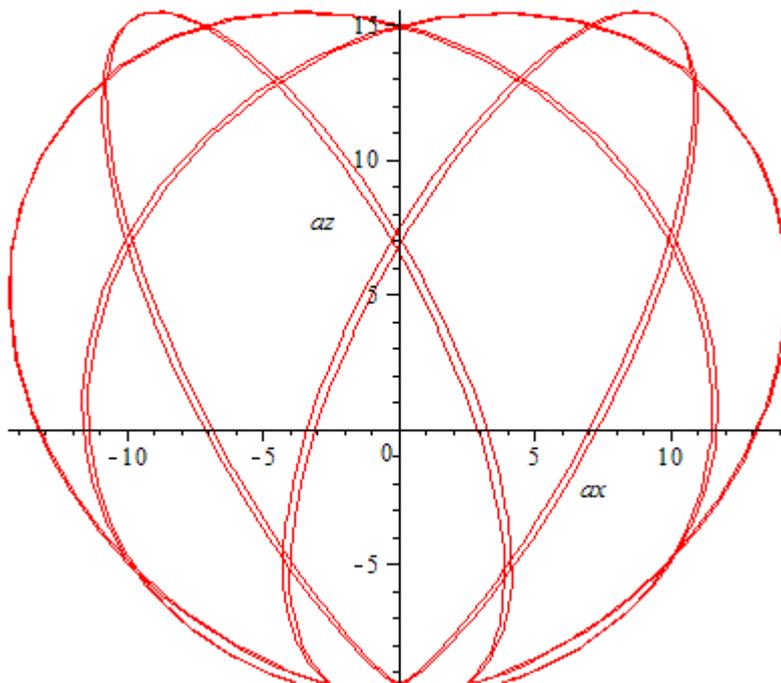
```
> plot([x,vz,t=0..18],labels=['x','vz'],scaling=constrained);
```



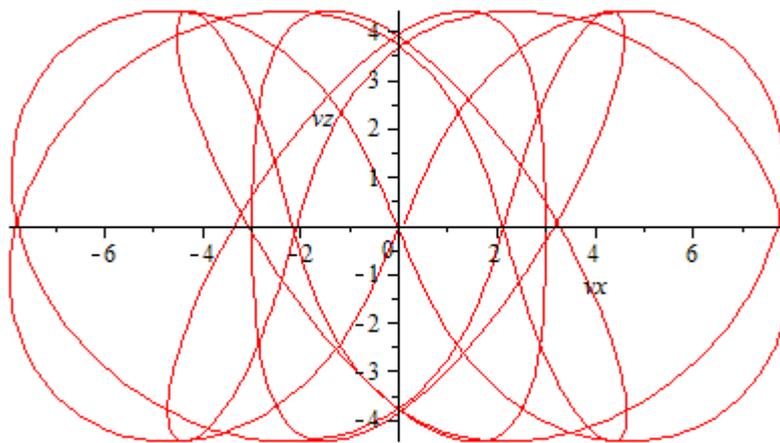
```
> plot([x,az,t=0..18],labels=['x','az'],scaling=constrained);
```



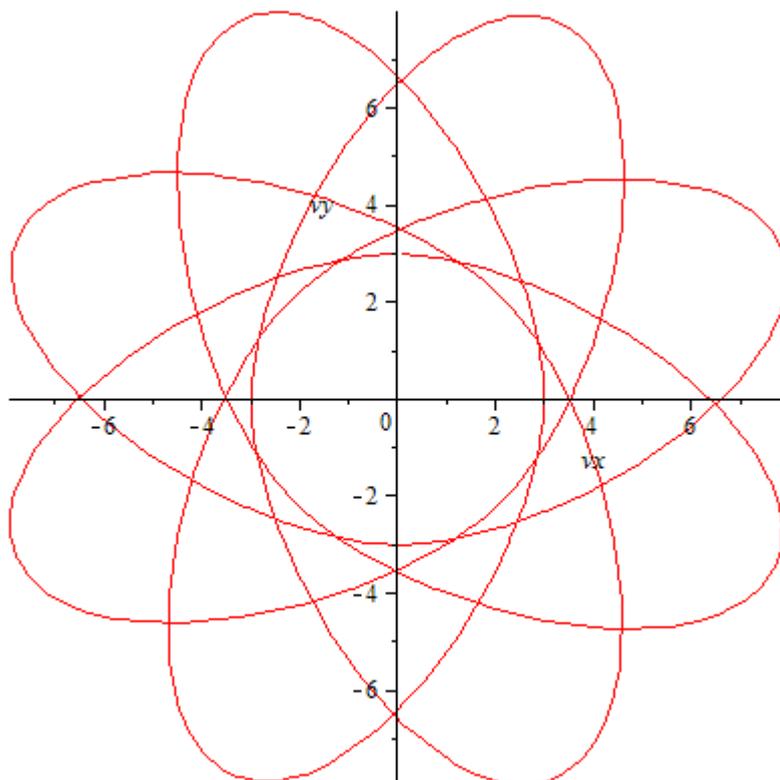
```
> plot([ax,az,t=0..18],labels=['ax','az'],scaling=constrained);
```



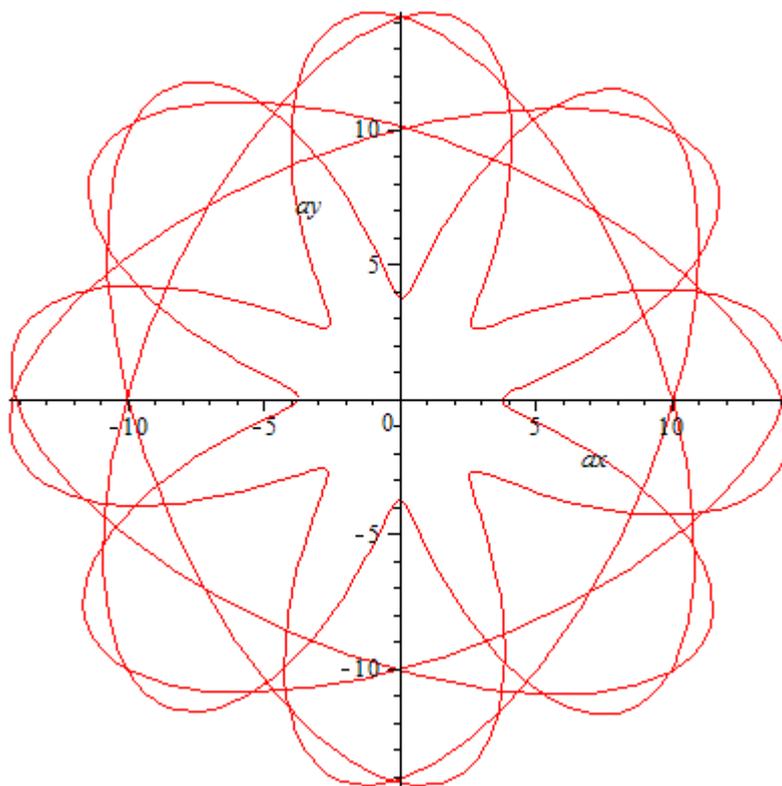
```
> plot([vx,vz,t=0..18],labels=['vx','vz'],scaling=constrained);
```



```
> plot([vx,vy,t=0..18],labels=['vx','vy'],scaling=constrained);
```



```
> plot([ax,ay,t=0..18],labels=['ax','ay'],scaling=constrained);
```



© M. Komma 02/2011  
Für die html-Ausgabe von Maple bin ich nicht verantwortlich...

Methode: Numerische Lösung der Differentialgleichungen mit Maple, siehe auch "[Newtons Maschine](#)".

Siehe auch:

[Kugelpendel](#)

[Kreispendel](#)

[Überschlag](#)

[Mathematisches Pendel](#)

[Zykloidenpendel](#)

[Das Märchen vom harmonischen Oszillator im Schwerfeld](#)

Harmonischer Oszillator, [quantenmechanisch](#)

Paulfalle, [Standard](#)

Paulfalle, [Mechanisches Analogon](#) | Paulfalle, Mechanisches Analogon, [Details](#)

[Moderne Physik mit Maple](#)

[HOME](#)

[Projekte](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

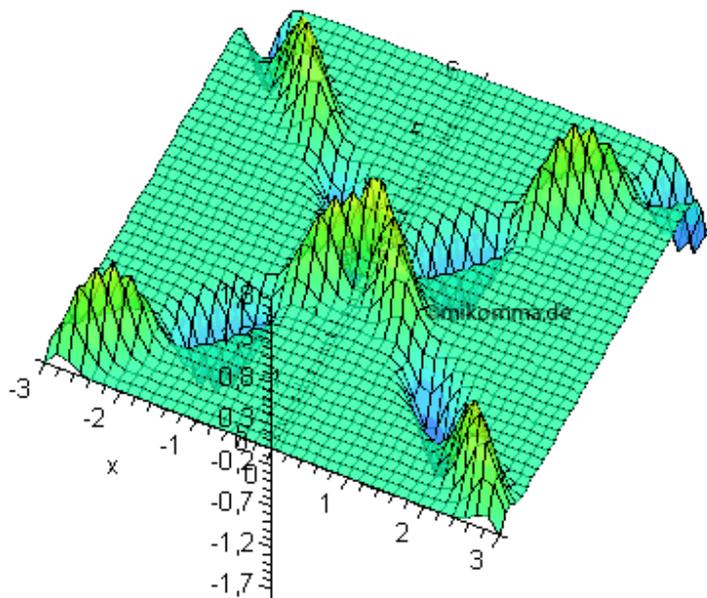
[Top](#)

## Interferenz zweier "Seilwellen"

Treffen sich zwei Wellen. Sagt die eine zur anderen: "Hi!" Und die andere zur einen "Hi - or lo?"

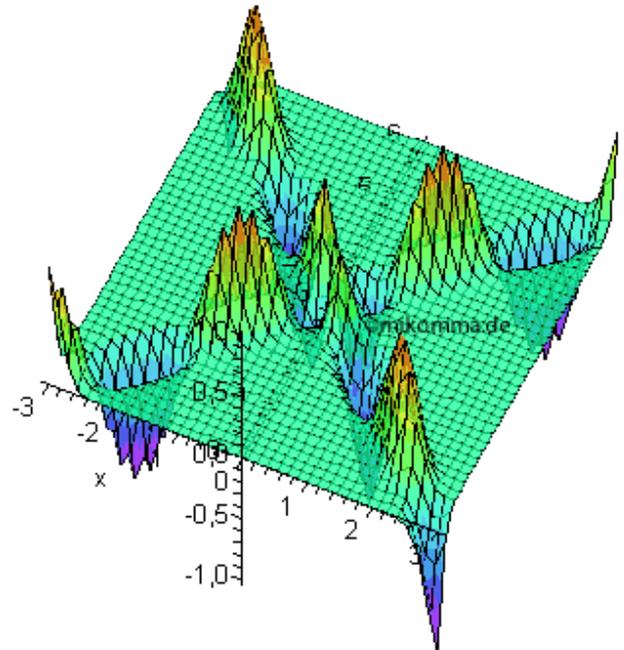
Ob es nun Seilwellen sind oder die Strahlen von Kreiswellen (Licht oder Wasser oder Schall oder...) es gilt immer das gleiche Prinzip: Die Amplituden werden addiert (zu jeder Zeit an jedem Ort). Besonders übersichtlich ist diese Superposition, wenn die Wellen die gleiche Wellenlänge und die gleiche Amplitude haben und eine feste Phasenbeziehung.

$t = 0.$



Konstruktive Interferenz: Zwei Wellen, die in  $x_0 = -3$  und  $x_0 = 3$  mit gleicher Phase starten, treffen sich auf der Mittelsenkrechten. Weil sie im Interferenzpunkt den Gangunterschied Null haben, addieren sich ihre Amplituden mit gleichem Vorzeichen.

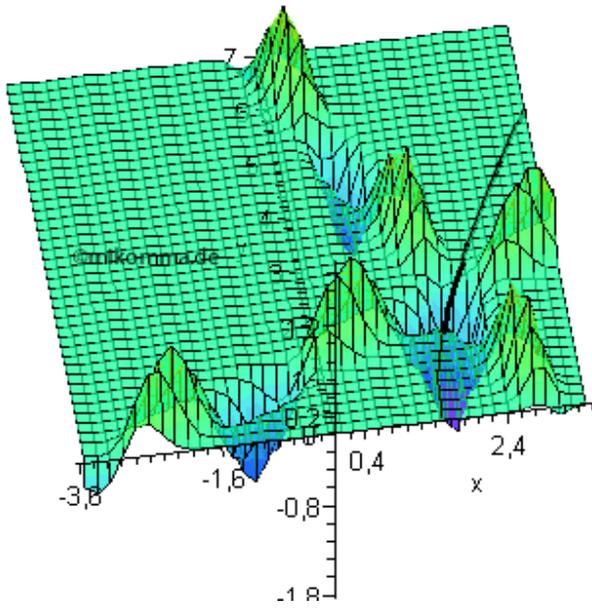
$t = 0.$



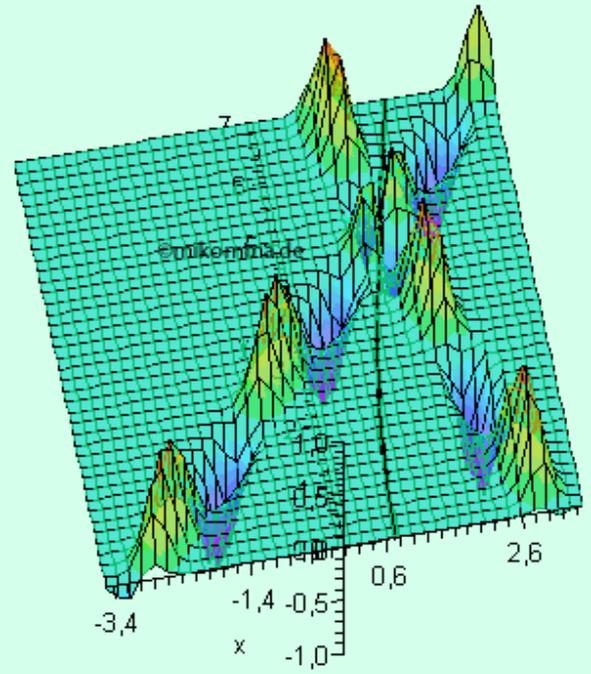
Destruktive Interferenz: Zwei Wellen, die in  $x_0 = -3$  und  $x_0 = 3$  mit entgegengesetzter Phase starten, treffen sich auf der Mittelsenkrechten. Weil sie im Interferenzpunkt den Gangunterschied Null haben, addieren sich ihre Amplituden mit entgegengesetztem Vorzeichen.

In den folgenden Animationen befinden sich in  $x_0$  und  $-x_0$  zwei gleichphasig schwingende Zentren. In der linken Spalte ist die konstruktive und in der rechten Spalte die destruktive Interferenz dargestellt. Die schwarzen Kurven zeigen die Orte für Hi-Hi oder Hi-Lo (Interferenzhyperbeln).

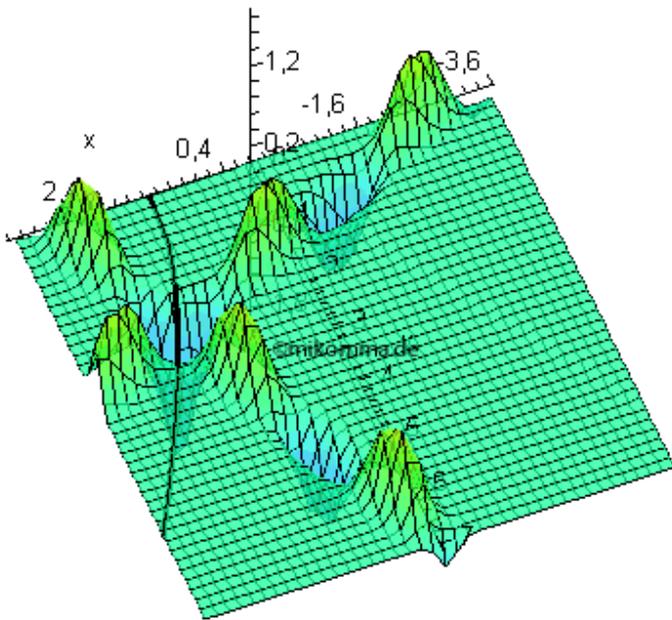
$t = 0.$



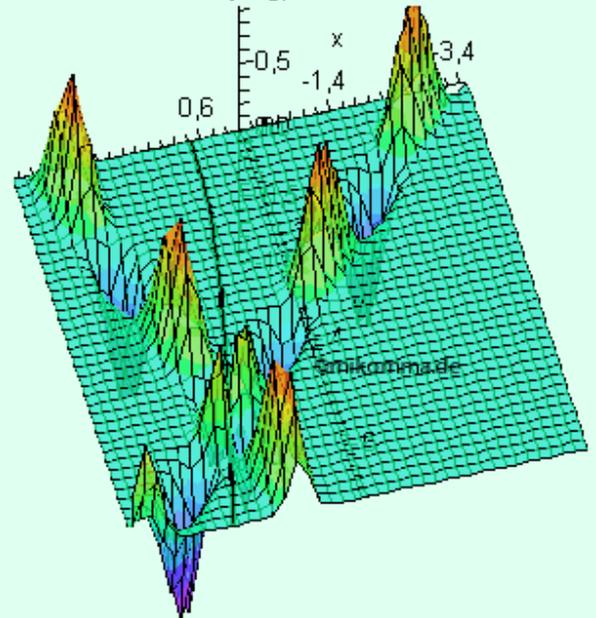
$t = 0.$

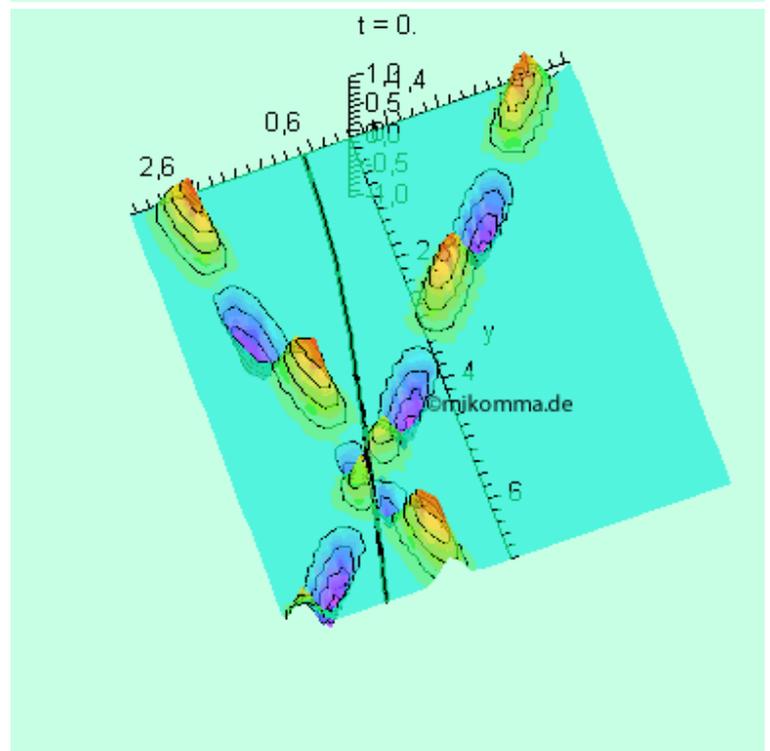
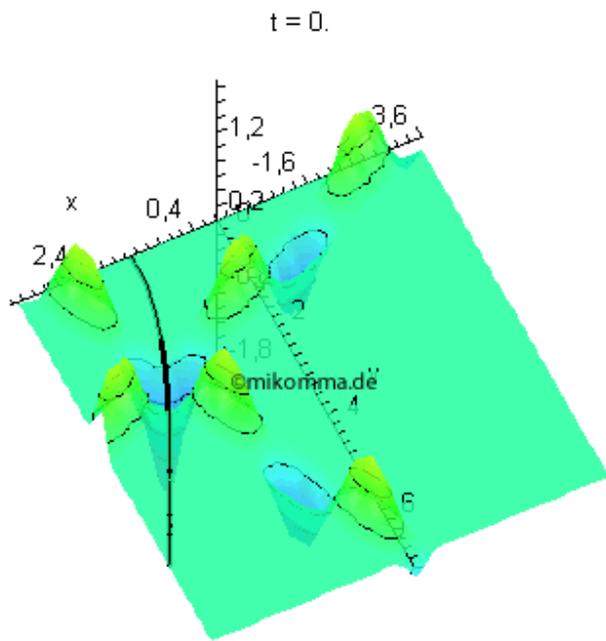
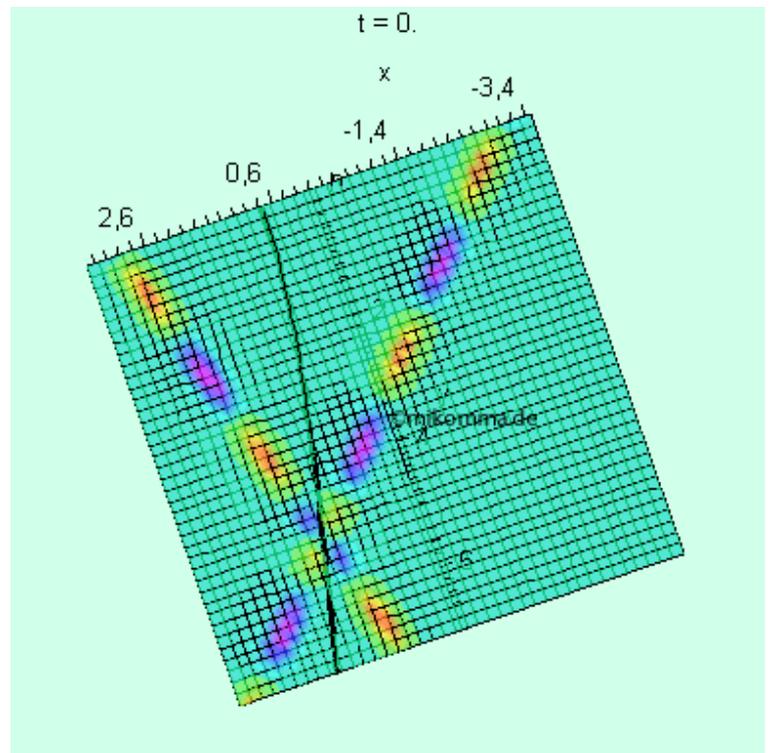
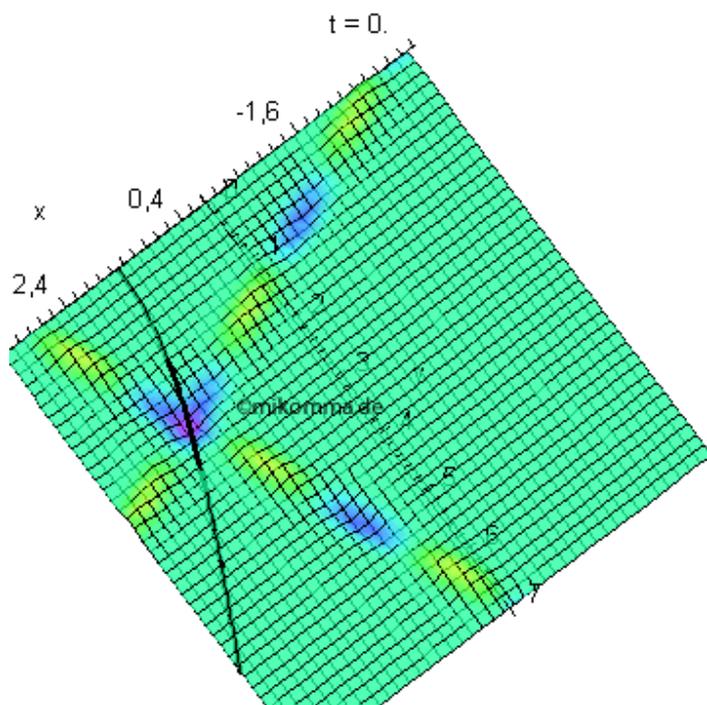


$t = 0.$



$t = 0.$

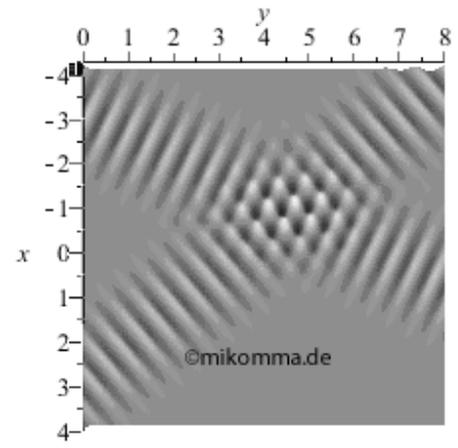
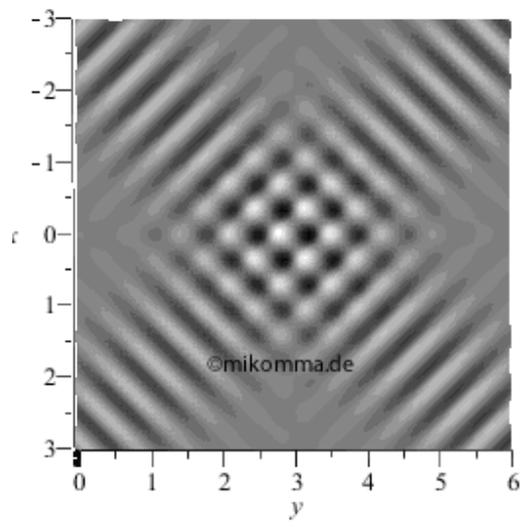




Alles klar?

Wenn man das Seil etwas verbreitert, sieht die Interferenz so aus...

Oder so...



siehe auch: [Interferenzmuster](#)

'[Moderne Physik mit Maple](#)'

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

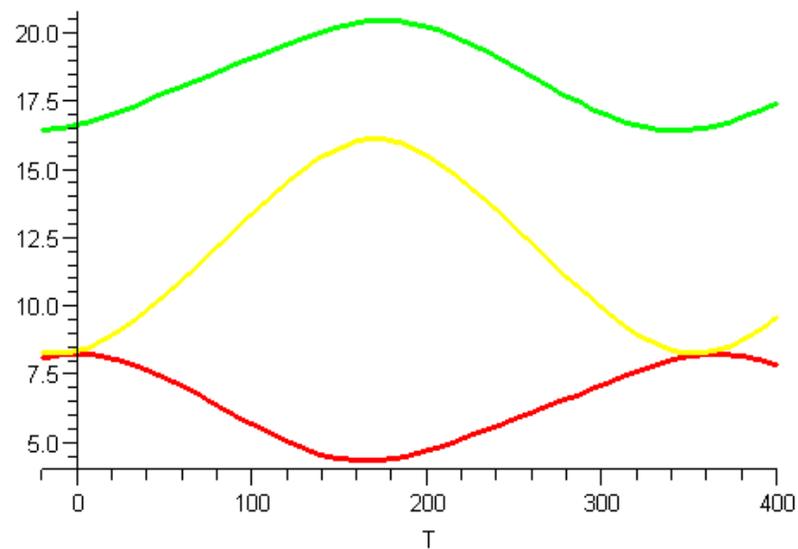
[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

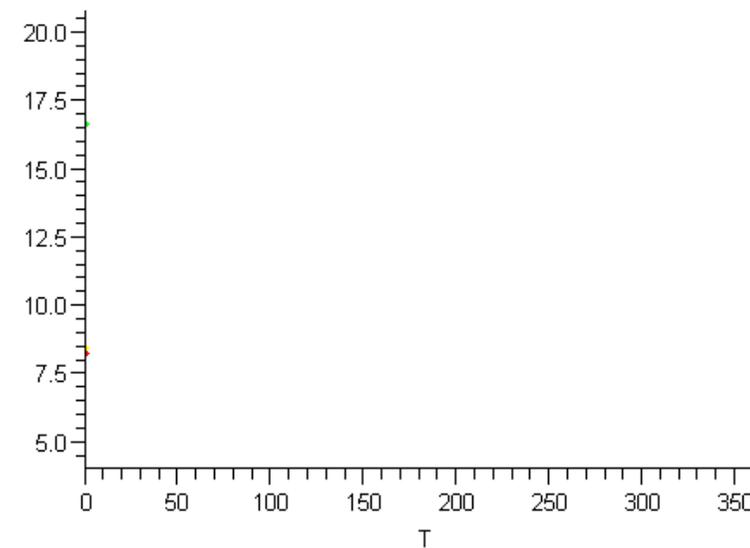
[Top](#)

## Das Analemma

Besonders um die Weihnachtszeit interessiert man sich dafür, wann die Tage wieder länger werden...



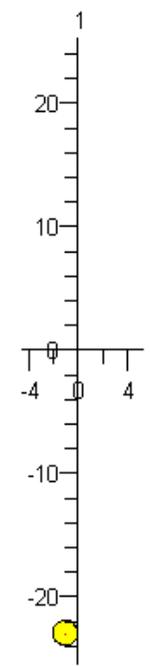
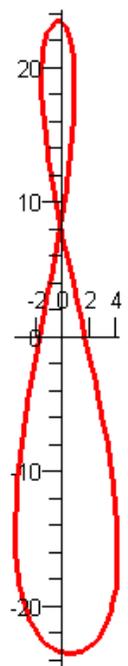
Die grüne Kurve zeigt den Sonnenuntergang, die rote den Aufgang und die gelbe die Tageslänge als Funktion der Jahrestage für einen Ort bei Stuttgart. [Berechnet und dargestellt mit Maple, Formeln demnächst...]



Wenn die Animationen (oben und unten, 365 frames) "zu langsam" laufen, verkleinern Sie das Fenster so, dass nur eine von beiden zu sehen ist.

Natürlich hängt die Tageslänge vom Stand der Sonne ab.

Trägt man den höchsten Stand der Sonne als Funktion der Jahrestage ab, also die Höhe (Deklination in Grad über dem Himmelsäquator) und Seite (Rektaszension ebenfalls in Grad), so entsteht eine "8": das Analemma.



['Moderne Physik mit Maple'](#)

[HOME](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)

## [Das Mobile Klassenzimmer](#) am

Isolde-Kurz-Gymnasium Reutlingen



[Schlußbericht](#) (September 99)

[Abi-Aufgaben](#)

[Schülerbefragung](#)

[Zwischenbericht](#) (Juli 98)

[Das neue Projekt: MathCom.](#)

Mit dem Laptop zum Abi - **Modellversuch in Reutlingen:**

### **Der Spickzettel ist erlaubt!**

Kultusministerin Schavan sieht im Computer das Lernmittel der Zukunft.

Bericht in der ZEIT zum [Abitur 1999](#).

Das Projekt wird nun fortgesetzt:

[MathCom](#)

[CAS-Server Baden-Württemberg](#)

Die [Landschaft der Mathematik](#) ist ein Gleichnis für die Demokratisierung der Wissenschaft und Lehre, die durch die [Neuen Technologien](#) ermöglicht wird:

Unter dem Motto **The power of working people together** finden Sie hier eine Sammlung von Schülerbeiträgen, die im Rahmen des Pilotprojekts "Mobiles Klassenzimmer" in Baden-Württemberg entstanden. Auf diese Weise erhielten die Schüler der vier Pilotschulen die Möglichkeit, ihre Hausaufgaben und Tips und Tricks auszutauschen: Virtuelles Klassenzimmer! Natürlich können Hausaufgaben auch Fehler enthalten und falsche Tips gegeben werden. Aber aus Fehlern kann man ja bekanntlich auch lernen, und so halte ich es für vertretbar oder sogar wünschenswert, wenn ich hier das Feld den Schülern überlasse.

Die Seiten wurden von Schülern mit einem enormen zusätzlichen Arbeitsaufwand erstellt und gepflegt. Ich bedanke mich deshalb vor allem bei [Fabian Hust \(Webmaster\)](#), [Armando Häring](#), [Andreas Pfäffle](#), [Martin Rempfer](#) und [Stephan Simon](#), die hier die Regie übernommen hatten. Mein Dank gilt aber auch allen, die hier Beiträge abliefern, mit denen wir den Mathematikunterricht modernisieren können.

*Die Beiträge können zu unterrichtlichen Zwecken verwendet werden. Das Copyright liegt beim Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg.*



[Mathematik mit Maple im WWW](#)

[Home](#)

## Fortbildung zur Quantenphysik an Gymnasien

Oberschulamt Tübingen 2002/3

Auf diesen Seiten werden Materialien und Informationen zur Fortbildung bereitgestellt.

### Aktuelle Information zum 3. Fortbildungstag

#### Termine:

25. März 03: Ulm, Schubart-Gymnasium  
 2. April 03: Markdorf  
 10. April 03: Hechingen

#### Programm:

9.00 - 10.00 Uhr: Dr. Komma: Mathematische Behandlung der Schrödingergleichung

- Material: [Manuskript mit weiteren Links](#) zur Mathematik und Simulationen

10.00 - 10.30 Uhr: Kaffeepause

10.30 - 12.30 Uhr: Dr. Haug, Renner, Schich: Lehrgänge zur Schrödingergleichung

- Material:
  - Dr. Haug: [Präsentation](#) | [Manuskript](#) | [Simulation](#)
  - Renner: [Präsentation](#) | [Manuskript](#) | [Simulation](#)

12.30 - 14.00 Uhr: Mittagspause

14.00 - 15.00 Uhr: Dr. Haug, Renner, Schich: Lehrgänge zur Schrödingergleichung

15.00 - 15.30 Uhr: Kaffeepause

15.30 - 16.30 Uhr: Götz, Dr. Haug, Dr. Komma, Renner, Schich: Workshop: Aufgaben zur Quantenphysik und Atomphysik

16.30 - 17.00 Uhr: Abschlussdiskussion

### [Programm der gesamten Fortbildung](#)

#### Erste Runde (Sommer 2002) [Programm](#)

- Einführung
  - Überblick über neuere Experimente: [Onlinepräsentation](#) (mit der linken Maustaste kommt man immer weiter :-)) | Download [PPT](#)
  - EPR-Paradoxon und Bellsche Ungleichung: [PDE](#)

- Quantencomputer: [Onlinepräsentation](#) | Download [PPT](#) | [Handreichung](#)
- Quantenkryptologie: [Onlinepräsentation](#) | Download [PPT](#) | [Handreichung](#)
  
- Zeigerkonzept
  - Überblick: Präsentation und Folien [gezippt](#)
  - [Zeiger mit Maple](#). Mit zwei kleinen Dateien (und Maple) können Sie mühelos alle erdenklichen Cornu-Spiralen erzeugen. Download einer [Prozedur](#) und des [Worksheets](#) (das die Prozedur einliest und ausführt).
    - Weitere Worksheets zur [Physik mit Maple](#)
  
- „Münchener Konzept“ - ein Unterrichtsgang aus Bayern
  - Überblick: [HTML](#) | [Word](#)
  - Doppelspaltexperiment: [Handreichung](#)
  - Interferometer (Quantenradierer): [Handreichung](#)
  - [Simulationsprogramme](#)
  - [Quelle im Internet](#)

## Zweite Runde (Herbst 2002)

Lehrgänge zur Quantenphysik:

- Konzept von Dorn-Bader (H.-P. Götz)
- Von der klassischen Physik zur Quantenphysik (M. Komma): [Word](#) | [HTML](#) (wird laufend aktualisiert).
- Konzept aus Rheinland-Pfalz (M. Renner). Gepackte Materialien: [PPT](#) | [Word](#) | [Taylor-Experiment](#) (Originalartikel)

## 2. Fortbildungstag für die

- Teilnehmer an der Quantenphysik-Fortbildung in Markdorf (10. Juli 2002):  
Termin: Dienstag, 17. September 2002  
Ort: Uni Konstanz, Gebäude P, Ebene 6, Raum P 602  
Zeit: 9.00 Uhr - 16.45 Uhr
- Teilnehmer an der Quantenphysik-Fortbildung in Hechingen (2. Juli 2002):  
Termin: Freitag, 11. Oktober 2002  
Ort: Uni Tübingen, Hörsaalzentrum Morgenstelle, Hörsaal N3  
Zeit: 9.00 Uhr - 16.30 Uhr
- Teilnehmer an der Quantenphysik-Fortbildung in Ulm (4. Juli 2002):  
Termin: Dienstag, 15. Oktober 2002  
Ort: Uni Ulm, Treffpunkt: Gebäude O 27, Eingang zum Hörsaal H 20 (wird eventuell noch geändert)  
Zeit: 9.00 Uhr - 16.30 Uhr
  - [Anfahrt zur Uni Ulm](#)

## Kommunikation

- [Diskussionsforum zur Fortbildung](#) bei [Lernen mit Topic Maps](#)

- Newsgroup de.sci.physik: [Google-Archiv](#) | [Bohrsches Atommodell](#).

[Home](#)

[Fächer](#)

[Physik](#)

[Elektrizität](#)

[Optik](#)

[Atomphysik](#)

[Quantenphysik](#)

[Top](#)