

HOME

Physik

Mechanik

Elektrizität

Optik

Atomphysik

Quantenphysik

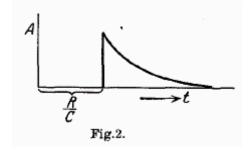
Publikationen

English

Die Widersprüche in der gängigen Behandlung der spontanen Emission eines Photons.

Eine ergänzende Zusammenfassung zu den Artikeln

Emission eines Photons - ohne Quantensprung! Emission zweier Photonen - ohne Quantensprung! Eine kleine Galerie zu atomaren Dipol-Übergängen Spontaneous photon emission revisited



Die Abbildung aus S. Kikuchi, Zeitschrift für Physik, July 1930, Volume 66, Issue 7–8, pp 558–571, "Über die Fortpflanzung von Lichtwellen in der Heisenberg-Paulischen Formulierung der Quantenelektrodynamik" zeigt den zeitlichen Verlauf des Erwartungswertes der Energiedichte (Quadrat der elektrischen Feldstärke) des elektrischen Feldes nach der Aussendung eines Lichtquants durch ein Atom (im Ursprung) in der Entfernung R. Der Artikel basiert auf der Weisskopf-Wigner-Näherung (im Folgenden WWN),

V. Weisskopf und E. Wigner, ZS. f. Phys. 63, 54, 1930, "Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie", die bis heute als Standard für die Behandlung der spontanen Emission eines Photons gilt. Die Grundannahmen der WWN sind:

- 1. Die Emission beginnt zu einem bestimmten Zeitpunkt (z.B. t = 0) mit maximaler Amplitude.
- **2.** Das angeregte Niveau "zerfällt" exponentiell, in Analogie zum radioaktiven Zerfall oder zum gedämpften harmonischen Oszillator.

Sowohl diese Annahmen, als auch die mathematische Behandlung und insbesondere die physikalische Interpretation beinhalten eine Reihe von Widersprüchen.

Zu 1.:

- Eine sprunghafte Änderung der Feldstärke und Energie führt nicht nur in der klassischen Physik (Maxwell) zu Divergenzen. So müsste z.B. für t = 0 die magnetische Feldstärke unendlich werden.
- Obwohl der Artikel von Kikuchi zeigen soll, dass sich das elektrische Feld (insbes. der Sprung in der Feldstärke) nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, verletzt schon der Sprung selbst das Kausalprinzip (siehe z.B. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley 1962, S. 599).
- In der Quantenphysik kann man einen Zeitpunkt prinzipiell nicht exakt bestimmen, bzw. eine beliebig schnelle Zustandsänderung wäre mit einer beliebig großen Energieunschärfe verbunden.

Zu 2.: In der WWN geht man von folgendem Zustand aus

$$\left|\psi(t)\right\rangle = a(t)e^{-i\omega_0t}\left|a,0\right\rangle + \sum_k b_k(t)\,e^{-i\omega_kt}|g,1_k\rangle$$

Die WWN setzt ein exponentielles Abklingen von a(t) explizit voraus, tatsächlich ergibt sich das aber auch ohne diese spezielle Annahme aus der Linearität der Schrödingergleichung (SGL), zusammen mit den anderen "üblichen Annahmen" (WWN und und Folgeartikel) die dazu dienen, eine geschlossene Lösung zu ermöglichen. Als Analogie (oder gar als Begründung?) wird der gedämpfte harmonische Oszillator (mechanisch oder elektrisch) der klassischen Physik angeführt - was ja auch gut zum exponentiellen Zerfall radioaktiver Kerne (also auch quantenmechanisch?) passt. Dabei übersieht man:

- Ein einzelnes Atom (geschweige denn ein Ensemble) kann nicht so präpariert werden wie eine gespannte Feder oder ein Kondensator (in einem Schwingkreis). Und auch beim Schließen eines klassischen Schalters beginnt der Strom erst nach einer endlichen Zeit merklich zu fließen, springt also nicht in unendlich kurzer Zeit von 0 auf einen endlichen Wert.
- Selbst wenn o.g. Präparation möglich wäre, befände sich das Atom (das Ensemble) in einem stationären Zustand (lt. Voraussetzung der WWN) mit a(t)=1 und alle b_k(t)=0, besitzt also kein Dipolmoment und kann nicht strahlen. Also muss man eine Anleihe beim Vakuum machen, das früher oder später (exponentiell abklingend natürlich) das Atom aus seinem stationären Zustand kippt. Das mag ja der Fall sein, aber:
- Kurz nach t = 0 hat das Atom ein verschwindend kleines Dipolmoment, kann also nicht strahlen wie ein Hertzscher Dipol, den man erst voll auflädt und dann zur Zeit t = 0 anschaltet (Funkeninduktor).
- Die (lineare) Überlagerung zweier QM-Zustände (obiger Ansatz) führt zu einer Schwebung mit einer Übergangsfrequenz (Differenzfrequenz), während ein klassischer Oszillator mit seiner Eigenfrequenz schwingt (mit Verschiebung durch Dämpfung), die man also der Eigenfrequenz des angeregten Zustands gleichsetzen müsste. Eine bessere Analogie wären also gekoppelte Pendel oder Schwingkreise.
- In obigem Ansatz wird der EES ignoriert: Man summiert zwar über verschiedene Moden k, also die Energien des Photons, aber nicht über verschiedene Energien des angeregten Zustands |a> (bei natürlich fester Energie des Grundzustand |g>). Dieser Fehler wird dann nachträglich in eine Energieunschärfe des angeregten Zustands "zurückgerechnet". Das mag ja praktikabel sein, aber dann war der unscharfe angeregte Zustand wohl nicht exakt stationär? Fand vielleicht deshalb die Emission spontan statt ganz ohne Vakuum?

Eine entscheidende Rolle in allen "Theorien" (oder besser Näherungen), die Übergänge mit Sprüngen erklären, spielen die "stationären Zustände" und ihre Fehlinterpretation:

- Stationäre Zustände: Diese Altlast der Fehlinterpretation hat tiefe Wurzeln (Bohr, Heisenberg), die noch heute schöne Blüten treiben. Stationäre Zustände werden weiterhin gerne mit stabilen Zuständen verwechselt: die Bohr-Heisenbergsche Echokammer (BHCQED:-) hat einen langen Nachhall! Aber schon Schrödinger wusste, dass es sich dabei nur um zeitunabhängige Zustände handelt zeitunabhängig im Sinne der mathematischen Beschreibung und nicht im Sinne eines stabilen Gleichgewichts.
 - In der Realität kommen stationäre Zustände nicht vor! Egal ob man versucht, einen Bleistift so auf die Spitze zu stellen, dass er nicht umfällt, oder ein Atom (oder gar ein Ensemble von Atomen) so zu präparieren, dass der stationäre Zustand zu einem stabilen Zustand wird, es würde unendlich lange dauern.
 - Der "normale Zustand" eines Atoms (des "strahlenden Elektrons") ist also der kontinuierliche Übergang von einem "Anfangszustand" höchster Energie (woher auch immer) in den Grundzustand (tiefster Energie, inklusive Einfang durch den Kern). In der Regel (Dipolübergang) leben "stationäre Zustände" nur 10⁻⁸s. Also das genaue Gegenteil des Bohrschen Atommodells!
 - Solange sich das Elektron im Kontinuum "bewegt" (z.B. mit einem Bahnimpuls), stehen ihm "stationäre Zustände" im Kontinuum zur Verfügung: z.B. Bremsstrahlung bis zur kw. Grenze. Danach (unterhalb der "vollständigen Abbremsung") gibt es die stationären Zustände nur noch mit einem diskreten Spektrum. Natürlich muss sich das Elektron immer an gewisse "Auswahlregeln" halten (mehr oder weniger: EES, IES…), aber bitte nicht an Bohrs Verbote!
 - Unterhalb der kurzwelligen Grenze, bzw. der Ionisationsgrenze: Rydbergzustände, langsames "Herunterspiralen".
 - Überlagerung von mehr als zwei Zuständen mit "kontinuierlichen Gewichten" siehe z.B. "<u>Das gefangene Wellenpaket</u>". Das Zweiniveau-System ist nur eine primitive Näherung!

Und dann gibt es noch die Zustände mit kontinuierlicher Energie, aber mit Quantenzahlen I, m.

• Und nicht zu vergessen die <u>Streuwellen</u> und <u>Bremsstrahlung</u>. Der Anfangszustand ist immer "stationär", aber sicher nicht stabil!

Mit anderen Worten: Ein stationärer Zustand ist nichts weiter als ein Zustand, der sich durch $psi(\mathbf{r},t) = u(\mathbf{r})^* exp(i^* omega^*t)$ mathematisch beschreiben lässt, sodass die Zeitabhängigkeit beim Bilden des Betragsquadrats "für alle Zeiten" verschwindet. Physikalisch bedeutet das aber nicht, dass der Zustand "für alle Zeiten" bestehen bleibt, also stabil ist, sondern sich auch "spontan" (also ohne äußere Einwirkung) ändern kann, z.B. durch Kopplung an das QED-Vakuum.

- Dipolmoment: Stationäre Zustände haben kein Dipolmoment (oder Multipolmoment), können also nicht strahlen. Die Ladungsverteilung schwingt zwar formal/mathematisch wie eine "stehende Welle" (Saite / Membran), aber mit einer komplexen Amplitude, es fließt kein Strom (siehe Elektrofluid). Und wie oben erwähnt ist die Frequenz der Strahlung nicht die Frequenz des angeregten Zustands, sondern die Differenzfrequenz zweier Zustände. Erst die Überlagerung von Zuständen besitzt ein Dipolmoment (Interferenzterm). Und zwar nicht nur ein statisches mittleres (räumlich), sondern ein zeitlich veränderliches.
- Linienform: Der Schluss vom "exponentiellen Zerfall" auf ein Spektrum einer Schwingung ist bedenklich. Zerfälle sind zufällige inkohärente Vorgänge. Nicht alles, was exponentiell abklingt, ist eine Schwingung mit einer exponentiell abklingenden Amplitude. Welche Linienform kann man einem a-Zerfall zuordnen, oder der Entladung eines Kondensators, oder dem Würfeln?
- "Photonenform": Die "Ortsfunktion eines Photons" ist in der QM/QED nicht streng definiert (weil das Photon keine Ruhemasse hat verkürzt gesagt). Pragmatiker arbeiten mit Gaußpaketen, was z.B. durch die Form des "HOM-Dips" bestätigt wird, aber auch durch neure Messungen der "Amplituden von Biphotonen".
- Kaskaden: Wenn die Übergänge eines Atoms wie radioaktive Zerfälle ablaufen würden ("dem radioaktiven Zerfallsgesetz folgen würden"), dann müssten Kaskadenübergänge "simultan" ablaufen (was zwar möglich ist, aber von Weisskopf-Wigner selbst ausgeschlossen wird).

Zitate und Standard-QED:

Die Liste der Zitate, in denen man versucht, den *Akt* (Sprung) der *spontanen* Emission und den *Prozess* der Ausstrahlung unter einen Hut zu bringen, wäre beliebig lang. Stellvertretend seien hier zwei Quellen genannt, die sich auf die WWN beziehen:

W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, 3. Ausgabe, S. 184: "The intensity distribution of the emitted line is given by the probability function of the final state $b_{a1\lambda}$. After the time $t > 1/\gamma$, when the atom certainly jumped down, the probability that a quantum h^*v has been emitted is given by [Lorentzlinie]..."

M.O. Scully, M.S. Zubairy, Quantum Optics, 6. Auflage, S. 208: "During the process of spontaneous emission, the atom emits a quantum of energy equal to E_a - E_b = h^*v . We now calculate the state of the field emitted during the spontaneous emission process. Auf S. 209 findet man dann "...can be interpreted as a kind of wave function for a photon".

So mogelt man sich elegant um den Dualismus herum, den man selbst eingeführt hat: Das Elektron muss von einem stationären Zustand zu einem anderen stationären Zustand springen, aber dabei muss "eine Art Welle" herauskommen. Die Amplitude dieser Welle muss exponentiell abklingen, weil ein Ensemble von Atomen exponentiell zerfällt, und deshalb ist das Spektrum "des Photons" eine Lorentzlinie! Alles klar?

Weshalb ist die QED dennoch so erfolgreich?

Weil sie mittelt und auf die Beschreibung der Dynamik der Elementarprozesse verzichtet.

Natürlich kann man Verschränkung nicht klassisch beschreiben. Aber umgekehrt ist die *lineare* QED bis heute nicht in der Lage, hoch auflösende Experimente zu beschreiben: für den zeitlichen (kontinuierlichen) Ablauf werden immer klassische - wellenmechanische, Schrödingersche - Modelle verwendet. Und nichtlineare! Aber natürlich kann man auch nichtlineare Prozesse quantisieren.

Umgekehrt: Den bisherigen Beschreibungen der Dynamik fehlt die richtige Art der Mittelung, um den Emissionsprozess (Dämpfung und Linienverschiebung) "korrekt" zu beschreiben (wobei "korrekt" die experimentelle Beobachtbarkeit beinhaltet)! Das fängt schon damit an, dass man das Elektron als punktförmige Ladung behandelt und nicht als Ladungsverteilung (Stichwort: Lorentzmodell).

Wie kann man die Widersprüche der WWN vermeiden?

Erster Versuch: Der Sprung zur Zeit "t=0" lässt sich vermeiden, wenn man die Superposition (und damit das Dipolmoment) zeitabhängig formuliert, siehe Emission eines Photons - ohne Quantensprung!

$$\left| \sqrt{1 - e^{-ct}} e^{-I f_1 t} + e^{-\frac{ct}{2}} e^{-I f_2 t} \right|^2 = 1 + 2\sqrt{1 - e^{-ct}} e^{-\frac{ct}{2}} \cos(f_1 t - f_2 t)$$

Die Fouriertransformierte dieser Schwingung (des Photons) ist nun (im Vergleich zur Näherung von Weisskopf und Wigner) aber keine Lorentzlinie, sondern eine "Beta-Linie":

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{\frac{c}{2} - I \ w0 + I \ w}{c}\right)$$

mit der Eulerschen Betafunktion B(x,y) zur zentralen Frequenz w0 (imaginäre Einheit als I notiert, w als Frequenz).

Das ist natürlich "rein phänomenologisch", aber auch nicht phänomenologischer als die WWN.

Mit der "Beta-Linie" bleibt die Kaskade unbefriedigend, siehe <u>Emission zweier Photonen - ohne Quantensprung!</u>, weil das "exponentielle Zerfallsgesetz"

$$e^{-kat}$$
, $\frac{ka\left(-e^{-kat}+e^{-kbt}\right)}{-kb+ka}$, $\frac{e^{-kat}kakb-ka^2e^{-kbt}+\left(-kb+ka\right)ka}{\left(-kb+ka\right)ka}$ mikomma.de

weiterhin vorausgesetzt wird. Es lassen sich aber eine ganze Reihe von kontinuierlichen Übergängen visualisieren: <u>Eine kleine Galerie zu atomaren Dipol-Übergängen</u>

Zweiter Versuch:

Spontaneous photon emission revisited

Stellt man die Zeitabhängigkeit des Dipolmoments in den Vordergrund und gibt nicht ein "exponentielles Abklingen" als Lösung vor, so erhält man mit der Proportionalitätskonstanten k die Differentialgleichung für die Besetzungszahl des "Grundzustands":

$$\rho_{aa} = k \rho_{aa} (1 - \rho_{aa})$$

auch bekannt als die *logistische Differentialgleichung*. Sie hat die "standartisierte" Lösung (ρ_{qq} (0)=1/2):

$$\rho_{gg} = \frac{1}{1 + e^{-kt}} = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{kt}{2}\right) \right)$$

auch bekannt als logistische Funktion, oder kumulative logistische Verteilung.

Das Frequenzspektrum erhält man durch Fouriertransformation. Die Amplitude der E-Feldstärke ist proportional zur Wurzel der Energie (od. Leistung):

$$E(t) \sim \frac{e^{-\frac{kt}{2}}}{1 + e^{-kt}} = \frac{1}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{kt}{2}\right)$$

Auch bekannt als hyperbolic secant distribution.

Die Fouriertransformierte von E(t) ist dann

$$E(\omega) = \frac{1}{k} \operatorname{sech}\left(\frac{\omega \pi}{k}\right)$$

und ihr auf 1 normiertes Quadrat, also das Intensitätsspektrum für ein Photon mit der Energie 1

$$I(\omega) = \frac{\pi}{2 k} \operatorname{sech} \left(\frac{\omega \pi}{k} \right)^2$$

Diese Phänomenologie passt zwar nicht zur linearen Schrödingergleichung, aber es gibt ja auch die nichtlineare Schrödingergleichung. Dazu kommt: Photonen mit sech-Profil sind bei Atomen besonders beliebt: Superradianz!

© August 2018, Dr. Michael Komma (VGWORT)

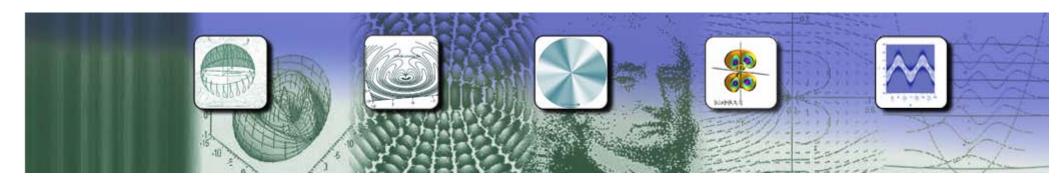
Siehe auch:

Matrixoptik | Doppelspalt und Dualismus | Quantenradierer | Photon am Doppelspalt | Gitter | Punktgitter | Kreuzgitter | Raumgitter | Beugung | Fresnelbeugung | Zeiger | Interferenz

Moderne Physik mit Maple

komma_AT_oe.uni-tuebingen.de

HOME | Fächer | Physik | Elektrizität | Optik | Atomphysik | Quantenphysik | Top



HOME

Physik

Mechanik

Elektrizität

Optik

Atomphysik

Quantenphysik

Publikationen

English

Emission eines Photons

ohne Quantensprung!

Ein Atom kann sich in <u>stationären Zuständen</u> befinden, z.B. mit den Quantenzahlen $\underline{n.l.m} = 1.0.0$ (Grundzustand) und n.l.m = 2,1,0 (ein angeregter Zustand). Wie kann es seinen Zustand ändern?

Durch Emission oder Absorption von elektromagnetischer Strahlung.

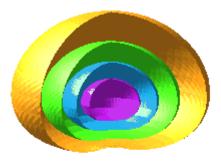
In der Quantenphysik berechnet man den Übergang von einem zum anderen Zustand durch die Überlagerung von Zuständen, z.B. mit den genannten Quantenzahlen, zu denen auch bestimmte Frequenzen gehören. Das Ergebnis ist eine Schwingung mit der Differenz der Frequenzen.

In der Animation sind vier Flächen gleicher Dichte der Elektronenladung (oder in der Sprache der Quantenphysik der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons) dargestellt, von violett (hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit) bis orange.

Das Atom führt eine Dipolschwingung aus (in der Mitte ist der positiv geladene Kern zu denken) und gibt deshalb Dipolstrahlung ab, oder absorbiert sie.

Für Licht beträgt die Frequenz der Schwingung etwa 10^14Hz. Der Vorgang/Übergang kann bis zu einigen Nanosekunden dauern, also etwa 100000 Schwingungen - je Lebensdauer des angeregten Zustands.

n,l,m = 1,0,0 <-> 2,1,0

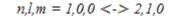


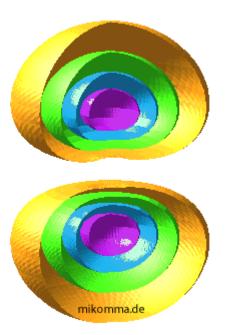


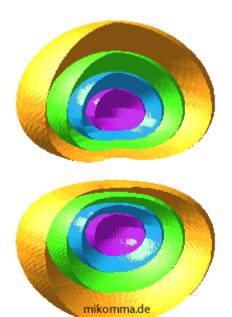
Bilder im Sekundentakt...

... oder etwas flüssiger

$$n,l,m = 1,0,0 <-> 2,1,0$$







Zur interaktiven Darstellung nebenstehend eine mp4-Datei Download mp4

Ob Schrödinger sich das so vorgestellt hat? Jedenfalls meinte er: "If we have to go on with these damned quantum jumps, then I'm sorry that I ever aot involved!"

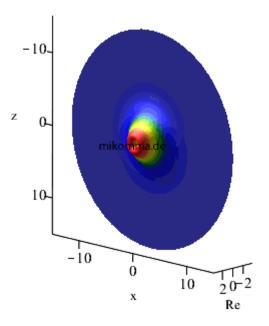
Schrödinger verglich die Zustände eines Atoms auch gerne mit den Schwingungen einer Membran (siehe auch Are there quantum jumps?):

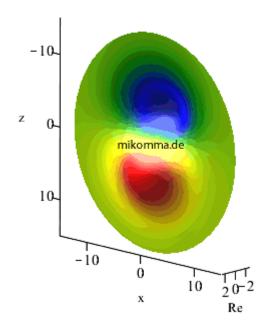
"This produces an infinite variety of initial deformations and accordingly a Your browser does not support HTML5 video. truly infinite variety of shapes of the ensuing vibration: the rapid 'succession of cinema pictures', so we might call it, which describes the vibration following on a particular initial deformation is infinitely manifold. But in every case, however complicated the actual motion is, it can be mathematically analysed as being the superposition of a discrete series of comparatively simple 'proper vibrations,' each of which goes on with a quite definite frequency."

Wir versuchen diese "atomaren Membranen" durch die Darstellung der Realteile der Wellenfunktion zu veranschaulichen. In den folgenden Animationen gilt für die Koordinaten: Die z-Achse ist wie bisher die "polare Achse" (Polarwinkel = 0 am Nordpol), und die x-Achse gehört zum Azimut 0. In Richtung der y-Achse (vorne/hinten) ist nun aber die Dichte der Wellenfunktion über der x-z-Ebene abgetragen (Realteil (Re) oder - weiter unten -Betragsquadrat (abs)).

Die Grundschwingung sieht dann etwa so aus wie die Membran eines Basslautsprechers...

...und zur ersten Oberschwingung gehört "die Oktav"





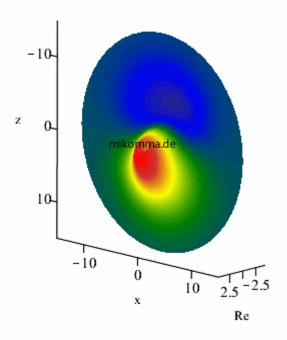
Aber Vorsicht mit Analogien! Im Atom gehört zum Grundzustand die höchste Frequenz.

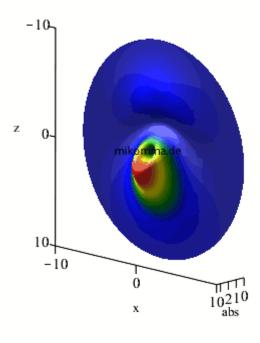
Aber Vorsicht mit Analogien! Der erste angeregte Zustand eines Atoms schwingt mit 1/4 der "Grundfrequenz".

Wie sieht nun die Überlagerung dieser Zustände aus? Wir versuchen es zunächst mit einer Überlagerung der beiden Zustände mit gleichen Gewichten (Amplituden):

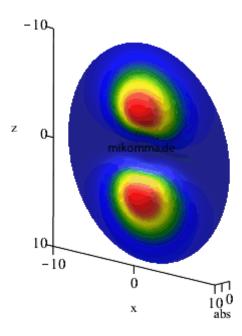
Bildet man die Summe der Realteile der Zustände, so entsteht dieses Muster. Das sieht zwar schön aus, ist aber falsch!

Atomare Zustände schwingen nicht nur real, sondern auch imaginär. Man hat also das Betragsquadrat der Summe der komplexen Amplituden zu bilden:





Aber Vorsicht mit Analogien: Stationäre Zustände leben nicht ewig, sondern sind in Wirklichkeit labile Zustände, also Durchgangsstadien. D.h., ein Zustand klingt exponentiell ab und der andere (energetisch tiefer liegende) nimmt im gleichen Maß zu, bis der einzig stabile Zustand, also der Grundzustand, erreicht ist. Der Übergang eines (Wasserstoff-) Atoms vom ersten angeregten Zustand zum Grundzustand, sieht also etwa so aus:



Theorie

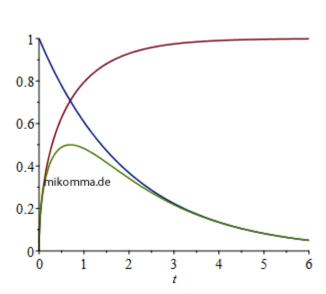
Stark vereinfacht (wenn man nur die Zeitabhängigkeit berücksichtigt) entspricht der Übergang eines Atoms vom Zustand mit der Frequenz f2 in den Zustand mit der Frequenz f1 der Überlagerung zweier Schwingungen (komplex geschrieben, I ist die imaginäre Einheit) mit zeitabhängigen Amplituden. Dabei klingt die Schwingung mit der Frequenz f2 exponentiell ab (Dämpfungskonstante/Zerfallsrate c), und die Schwingung mit der Frequenz f1 nimmt komplementär zu (Summe der Amplitudenquadrate = 1). Das Betragsquadrat der Summe ist dann eine Schwebung (Differenz der Frequenzen im Cosinus) mit zeitabhängiger Amplitude:

$$\left| \sqrt{1 - e^{-ct}} e^{-I f_1 t} + e^{-\frac{ct}{2}} e^{-I f_2 t} \right|^2 = 1 + 2\sqrt{1 - e^{-ct}} e^{-\frac{ct}{2}} \cos(f_1 t - f_2 t)$$

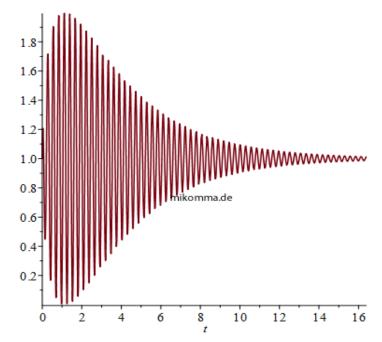
Bei der Überlagerung zweier atomarer Zustände sind die Amplituden noch ortsabhängig und man erhält z.B. für den oben dargestellten Übergang (in atomaren Einheiten):

$$r^{2}\left(\sqrt{1-e^{-c\,t}}\,r\,\sqrt{2}\,\cos(\theta)\,\cos\!\left(\frac{3\,\pi\,t}{2}\right)\,e^{-\frac{3\,r}{2}-\frac{c\,t}{2}}+\frac{e^{-c\,t-r}\,r^{2}\cos(\theta)^{2}}{8}-4\,e^{-c\,t-2\,r}+4\,e^{-2\,r}\right)$$

Der Vorfaktor des "Interferenzterms" cos(f1*t-f2*t) bedeutet, dass die Schwebung nicht schlagartig einsetzt und dann exponentiell abklingt (blaue Kurve),



vielmehr muss erst ein "Einschwingvorgang" erfolgen (grüne Kurve = Produkt von blau und rot), ganz in Analogie zum radioaktiven Zerfall (Mutter-Tochter).



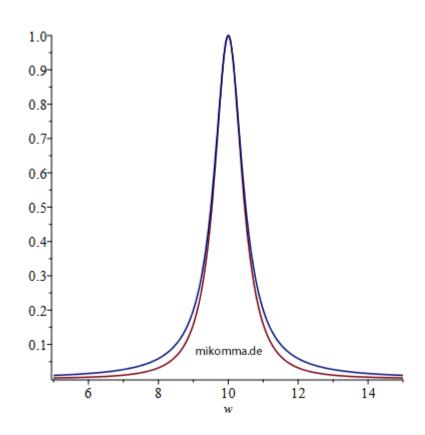
Das "Tochterelement" wäre dann in diesem Fall ein Photon, das etwa so wie oben abgebildet aussieht, bzw. ein Zwischenzustand des Atoms, der weiter in den stabilen Grundzustand zerfällt.

Die Fouriertransformierte dieser Schwingung (des Photons) ist nun (im Vergleich zur Näherung von Weisskopf und Wigner - s.u. Literatur) aber keine Lorentzlinie, sondern eine "Beta-Linie":

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{\frac{c}{2} - I \ w0 + I \ w}{c}\right)$$

mit der Eulerschen Betafunktion B(x,y) zur zentralen Frequenz w0 (imaginäre Einheit als I notiert, w als Frequenz). In der Darstellung rechts sieht man, dass die Beta-Linie (rot) etwas schmaler ist, als die Lorentzlinie (blau, mit der vollen Halbwertsbreite c). Das ist auch vernünftig, weil das sprunghafte Einsetzen der Schwingung (Lorentzlinie) einen größeren Anteil hoher Frequenzen erfordert.

Der Unterschied der beiden Linienformen ist nur minimal und wird in Messungen ohnehin von anderen Effekten um Größenordnungen überlagert, z.B. Stoßverbreiterung (Lorentzprofil) und Dopplerverbreiterung (Gaußprofil). So erklärt sich auch, dass bis heute in allen Darstellungen des Photons als Wellenzug, ein sprunghafter Beginn der Strahlung zu finden ist.



Noch etwas mehr Theorie

Das System Atom-Photon befindet sich während der Emission (oder Absorption) eines Photons im Zustand

$$\Psi_{atom,\,photon} = c_{a0}(\,t)\,\mid\!a\,\rangle\mid\!0\,\rangle + c_{q1}(\,t)\,\mid\!g\,\rangle\mid\!1\,\rangle$$

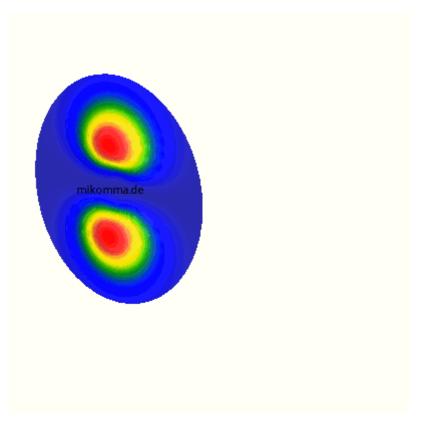
[Anm.: Dabei handelt es sich um einen reinen Zustand (und kein Gemisch von Zuständen). Der zweite Summand steht stellvertretend für eine Summe (genauer gesagt ein Integral) über alle möglichen Moden k des Photons $|1\rangle := |0,0,...,1,0,0,...\rangle$ (ein Photon in der k-ten Mode).

Im angeregten Zustand |a> ist kein Photon |0> vorhanden, und im Grundzustand |g> ist ein Photon |1> vorhanden. Die Amplituden c(t) sind zeitabhängig, d.h., der ebenfalls zeitabhängige Zustand startet als reiner Produktzustand (eine Amplitude ist Null), durchläuft ein Stadium der maximalen Verschränkung (beide Amplituden sind gleich) und endet als reiner Produktzustand (die andere Amplitude ist Null). Schrödingers Katze hat also kein Problem, sich für lebendig oder tot zu entscheiden, wenn man sie mit einem Atom, das ein Photon emittiert, in einen Kasten sperrt. Das liegt einfach daran, dass das Atom auch nicht ewig in einem Superpositionszustand (aus zwei "stationären Zuständen") "lebt", und nur dann springt, wenn man den Deckel der Kiste aufmacht, sondern kontinuierlich Energie abgibt.

Für die Emission ist es üblich einen "exponentiellen Zerfall", bzw. einen "gedämpften harmonischen Oszillator" anzusetzen (z.B. Weisskopf-Wigner-Näherung). Die Amplituden c(t) lauten dann wie oben

$$c_{a0}(t) = e^{-\frac{ct}{2}}, c_{g1}(t) = \sqrt{1 - e^{-ct}}$$

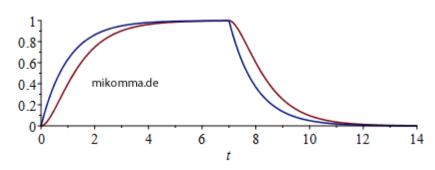
und ihr Produkt - und nicht $c_{a0}(t)$ alleine! - bestimmt sowohl den zeitlichen Verlauf der Dipolschwingung als auch des abgestrahlten Wellenzugs (der unten rechts mit Lichtgeschwindigkeit aus dem Bild verschwindet :-):

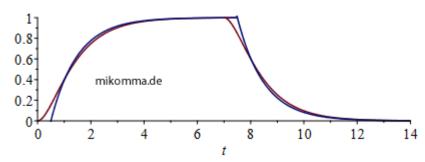


Kritik

Die Weisskopf-Wigner-Näherung basiert auf der Annahme des "rein exponentiellen Zerfalls" eines Atoms. Die Emission eines Photons wird also aus zwei Gründen phänomenologisch behandelt: 1. Ein (einzelnes) Atom verhält sich bei der Emission eines Photons wie ein "Ensemble radioaktiver Kerne". Misst man die Anzahl der angeregten (oder zerfallenen) Kerne als Funktion der Zeit, so ergibt sich das bekannte Zerfallsgesetz. 2. Die Abgabe der Energie an das elektromagnetische Feld beginnt schlagartig mit der maximalen Amplitude (und klingt dann exponentiell ab, denn Quantensprünge gibt es ja nicht :-).

Verwendet man diesen phänomenologischen Ansatz aus der statistischen Interpretation für die Amplituden in der zeitabhängigen Schrödingergleichung (oder in einer anderen zeitabhängigen Beschreibung), so ergibt sich ein Widerspruch: Das für die Emission erforderliche Dipolmoment wird zeitabhängig, und die Emission elektromagnetischer Strahlung setzt nicht schlagartig ein (wie bei einem <u>Funkeninduktor</u>). Damit scheint die Energiebilanz nicht mehr zu stimmen: Im statistischen (und statischen) Bild erfolgt die Energieabgabe (und -aufnahme) schneller als in der zeitabhängigen Beschreibung. In der folgenden Abbildung ist der "rein exponentielle Zerfall" blau dargestellt (entspricht der Auf- und Entladung eines Kondensators) und die Energieänderung durch eine "atomare Dipolschwingung" rot.





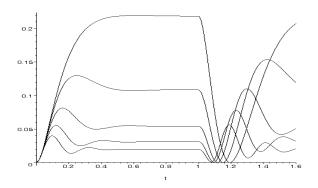
Im linken Bild beginnen das "statistische Atom" (blau) und das "Schrödingersche Atom" (rot) zum gleichen Zeitpunkt mit der Absorption (t=0) und Emission (t=7) eines Photons.

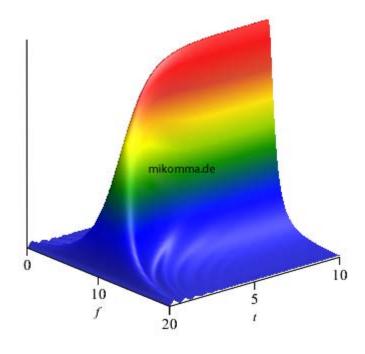
Die Vorstellung, dass man bei einem Atom den Schalter zur Zeit t=0 umlegen kann, ist etwas problematisch und eigentlich durch die Energie-Zeit-UR verboten (ex falso quodlibet :-), aber unter dieser Voraussetzung unterscheiden sich die Kurven doch deutlich. Aber man kann ja - rein phänomenologisch - die blaue Kurve etwas verschieben, wie im rechten Bild.

Die Problematik erinnert ein wenig an die "Bierschaum-Parabel" des radioaktiven Zerfalls:

- A) Im Bierschaum (bestehend aus einem Ensemble identischen Bläschen = radioaktiven Kernen) platzt jedes Bläschen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit/Zeit (Zerfallsrate), also ist die Änderung der Anzahl der Bläschen proportional zum Bestand der Bläschen.
- B) Jedes Bläschen schrumpft kontinuierlich wie ein undichter Luftballon, also ist die Änderungsrate seines Volumens seinem Volumen proportional. Natürlich verringert sich in beiden Fällen das Volumen des Bierschaums *erwartungsgemäß* rein exponentiell...

Spaß beiseite: Ein Atom kann Strahlung nicht nur bei der Resonanzfrequenz (im Bild rechts bei f=10) absorbieren und emittieren, sondern auch daneben. Die roten Kurven in obiger Abbildung zeigen nur den Resonanzfall. Wenn man über alle Frequenzen integriert, bekommt man mit einer Lorentzverteilung die blauen Kurven. Interessant sind dabei die "Wellen" in der Abbildung rechts: Außerhalb der Resonanz findet ein "Einschwingvorgang" statt - ganz klassisch? Siehe auch What is a photon?





Literatur:

- V. Weisskopf und E. Wigner, ZS. f. Phys. 63, 54, 1930 Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie.
- S. Kikuchi, Zeitschrift für Physik, July 1930, Volume 66, Issue 7–8, pp 558–571 Über die Fortpflanzung von Lichtwellen in der Heisenberg-Paulischen Formulierung der Quantenelektrodynamik.

© Mai 2017, Dr. Michael Komma (VGWORT)

Siehe auch:

Galerie | Kaskade | Spontane Emission, logistisch | Weisskopf-Wigner

What is a photon?

Der Quantensprung

Quantensprung in Zeitlupe

"Are there quantum jumps?"

Historisches zum Quantensprung

Weitere Quantensprünge

Rydbergatome

Elektrofluid

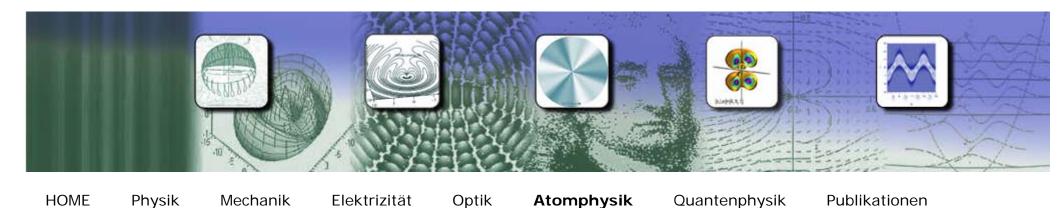
H-Orbitals aus ' Moderne Physik mit Maple'

Plancks Formel

Energieströmung

komma AT oe.uni-tuebingen.de

HOME | Fächer | Physik | Elektrizität | Optik | Atomphysik | Quantenphysik | Top



English

Emission zweier Photonen

ohne Quantensprung!

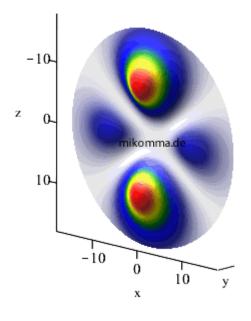
Zur Legende der Animationen, siehe die <u>Hauptseite "Emission eines Photons"</u> und <u>Galerie</u>

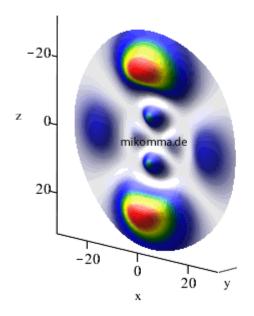
Z-Dipol (linear polarisierte Photonen)

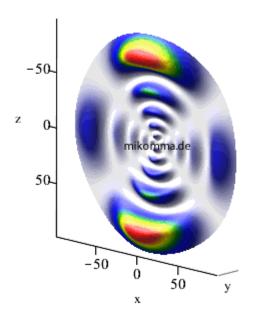
In den folgenden Animationen sind Übergänge von n3 = n2 + 1 und n2 = n1 + 1 nach n1 dargestellt und als n3 -> n2 -> n1 notiert (über den Animationen)

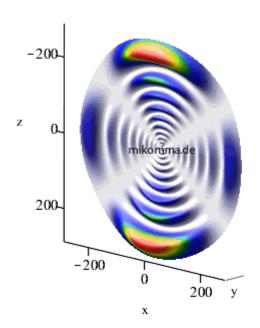
Für ein Dipolmoment in z-Richtung gilt m1 = m2 = m3 = 0.

Minimale Drehimpulsquantenzahlen: 13 = 2, 12 = 1, 11 = 0.





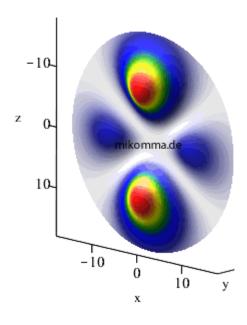


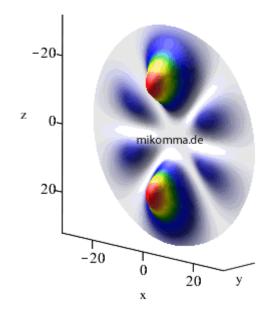


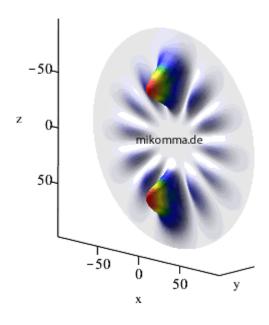
Das Elektron springt also nicht (rein zufällig) vom höheren Zustand in den niedrigeren, und überlegt sich dort eine Weile, ob es weiterspringen soll. Vielmehr kann das Atom auf (mindestens) zwei Frequenzen senden, wobei sich die Frequenz von Übergang zu Übergang erhöht, bis das Atom im Grundzustand angekommen ist. (Die Animationen zeigen nur zwei Übergänge, weil der jeweils tiefste Zustand künstlich als "Grundzustand" deklariert wurde ("Zerfallsrate" = 0)). Die Modellierung atomarer Übergänge mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung liefert also das genaue Gegenteil des Bohrschen Atommodells: Das Atom strahlt kontinuierlich Energie ab, allerdings auf diskreten Frequenzen. Das Problem des "in den Kern stürzenden Elektrons" entsteht nur, wenn man sich das Elektron als punktförmiges Teilchen vorstellt, das sich auf einer klassischen Bahn bewegt. Aber das Elektron ist kein punktförmiges (klassisches) Teilchen, sondern wird besser durch eine Ladungsverteilung beschrieben, die im Potential des Kerns nur "bestimmte Muster" annehmen kann. Unter diesen Mustern sind die "stationären Zustände" nicht stabile Zustände, in denen das Elektron auf Ewigkeit gefangen ist, sondern nur Muster, die sich ohne Berücksichtigung der Zeit (oder Dynamik) leicht berechnen lassen. Die Dynamik entsteht in der wellenmechanischen Beschreibung durch die Überlagerung von Zuständen, die zu Schwebungen führen.

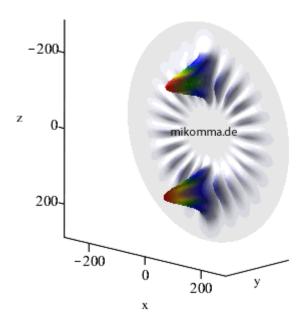
Maximales I: 13 = n3-1 (= n2), 12 = 13-1, 11 = 12-1 (weiterhin m1 = m2 = m3 = 0)

3 -> 2 -> 1



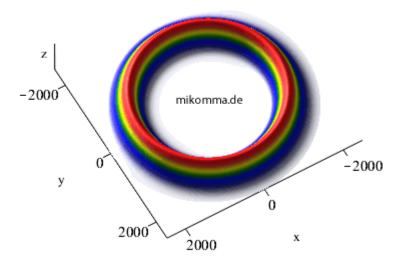


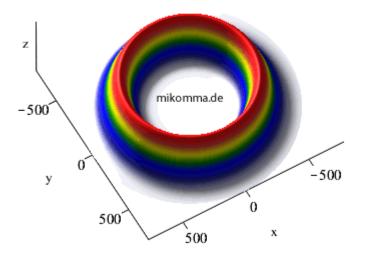


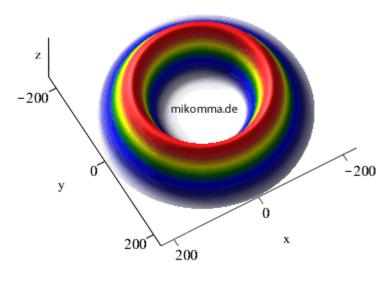


X-Y-Dipol (zirkular polarisierte Photonen):

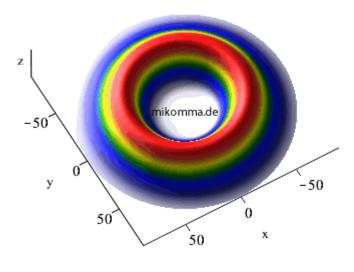
So "spiralt" sich ein Elektron von einem hochangeregten "kreisförmigen Rydbergzustand" (n = 42) in den Grundzustand (n = 1).



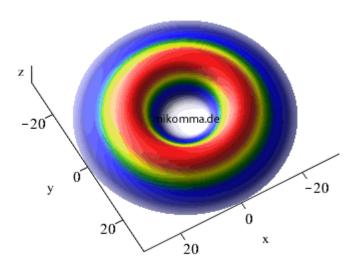


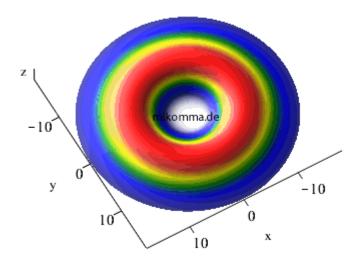


4 -> 3 -> 2



3 -> 2 -> 1



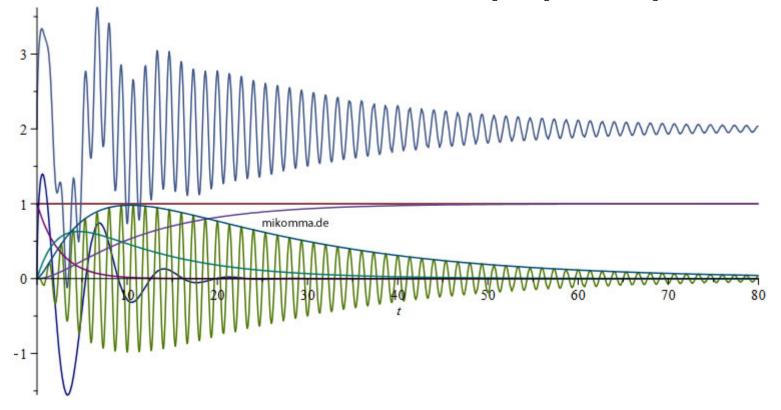


Methode:

Wenn man annimmt, dass Atome (auch einzelne - und nicht nur ein Ensemble :-) sich bei der Emission von Photonen an das "Gesetz des radioaktiven Zerfalls" halten (Weisskopf-Wigner-Näherung), dann gilt für die "Zerfallsreihe" A -> B -> C mit den "Zerfallskonstanten" ka und kb (kc = 0), bzw. für die Besetzungszahlen von A, B und C:

$$\mathrm{e}^{-ka\;t},\;\frac{ka\;\left(-\mathrm{e}^{-ka\;t}+\mathrm{e}^{-kb\;t}\right)}{-kb+ka},\;\frac{\mathrm{e}^{-ka\;t}\;ka\;kb-ka^2\;\mathrm{e}^{-kb\;t}+\left(-kb+ka\right)\;ka}{\left(-kb+ka\right)\;ka}$$
 mikomma.de

Berechnet man mit diesem Ansatz wie in "Emission eines Photons" die emittierte Strahlung, so ergibt sich z.B. folgendes Bild:



Legende:

- nicht oszillierende Kurven:

Der Zustand A (Mutter) zerfällt exponentiell, der Zustand B (Tochter) wird vorübergehend besetzt und der Zustand C (Enkelin) nähert sich 1 (der Summe der Besetzungszahlen), weil als stabil vorausgesetzt. Die fünfte nicht oszillierende Kurve ist eine Einhüllende:

- oszillierende Kurven:

A -> B: kleine Frequenz, schnell abklingend (große "Zerfallsrate"),

B -> C: große Frequenz, erst zunehmend, dann langsam abklingend (mit Einhüllender oben),

A -> B -> C: Resultierende Strahlung der Kaskade, zur besseren Sichtbarkeit um 2 nach oben versetzt.

© Mai 2017, Dr. Michael Komma (VGWORT)

Siehe auch:

Galerie | Emission eines Photons | Spontane Emission, logistisch | Weisskopf-Wigner

What is a photon?

Der Quantensprung

Quantensprung in Zeitlupe

"Are there quantum jumps?"

Historisches zum Quantensprung

Weitere Quantensprünge

Rydbergatome

H-Orbitals aus ' Moderne Physik mit Maple'

Plancks Formel

Energieströmung

komma AT oe.uni-tuebingen.de

HOME | Fächer | Physik | Elektrizität | Optik | Atomphysik | Quantenphysik | Top



English

Emission eines Photons

Eine kleine Galerie zu atomaren Dipol-Übergängen

Zur Legende der Animationen, siehe die <u>Hauptseite "Emission eines Photons"</u>. Auf dieser Seite sind Übergänge dargestellt, bei denen

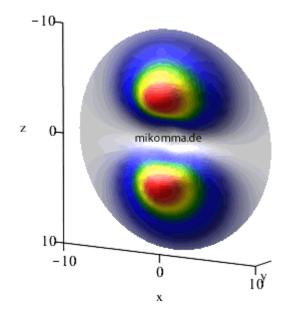
- 1. Der atomare Dipol in z-Richtung schwingt, mit a) minimalem Drehimpuls und b) maximalem Drehimpuls, und
- 2. Der atomare Dipol in der x-y-Ebene rotiert.

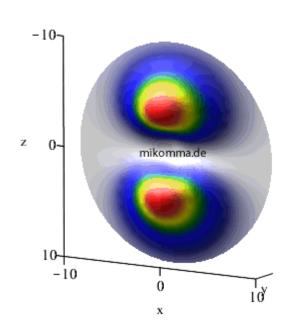
Es handelt sich durchweg um "stroboskopische Darstellungen", die so eingerichtet sind, dass in 80 Bildern ein Übergang dargestellt werden kann. In Wirklichkeit ist die Dauer der atomaren Schwingung (etwa) proportional zur dritten Potenz der Hauptquantenzahl und der "Radius des Atoms" wächst mit dem Quadrat der Hauptquantenzahl (siehe Achsenbeschriftung).

1. Dipol in z-Richtung: linear polarisiertes Photon

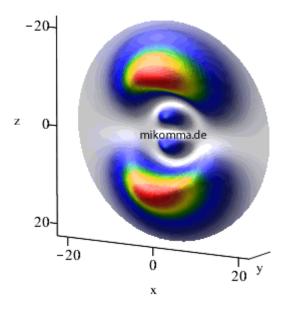
In den folgenden Animationen sind Übergänge von n2 = n1 + 1 nach n1 dargestellt und als n2 -> n1 notiert (über der jeweiligen Animation). Für ein Dipolmoment in z-Richtung gilt m1 = m2 = 0.

a) Minimale Drehimpulsquantenzahlen: 12 = 1, 11 = 0.

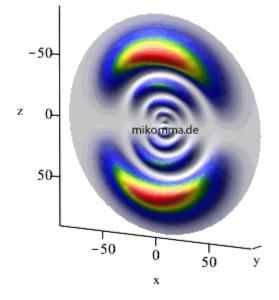




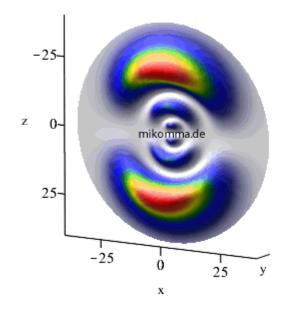
3 -> 2



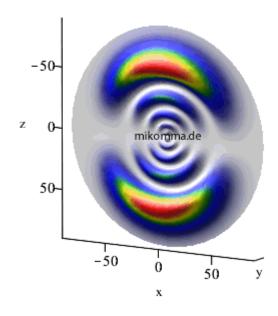




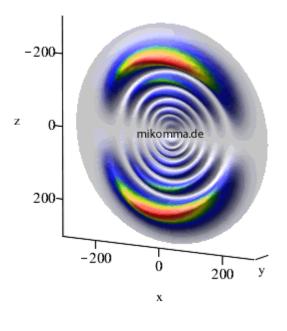
11 -> 10

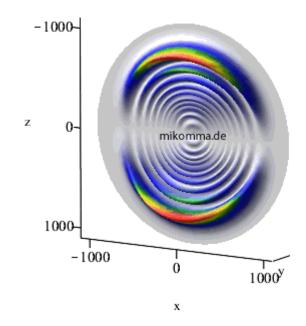


6 -> 5 Zeitlupe

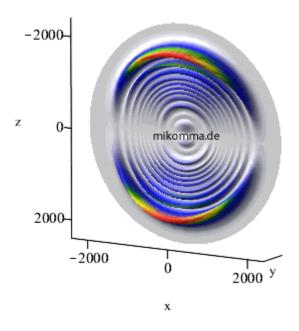


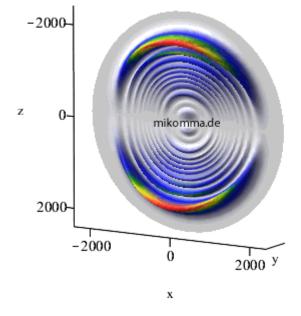
21 -> 20





31 -> 30 Zeitlupe

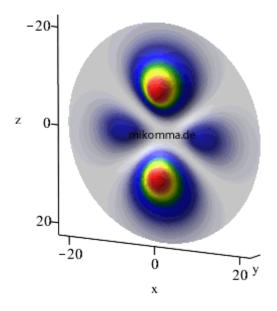




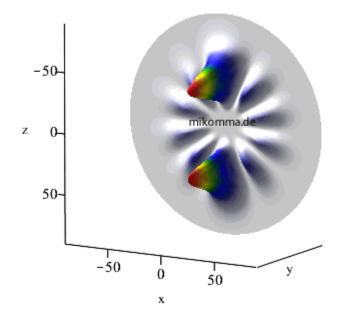
b) Maximale Drehimpulsquantenzahlen: 12 = n2-1 (= n1), 11 = 12-1 (weiterhin m1 = m2 = 0),

3 -> 2

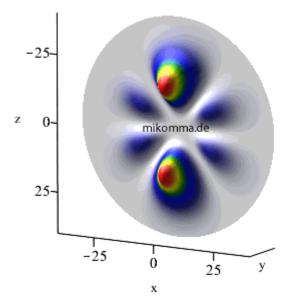
4 -> 3



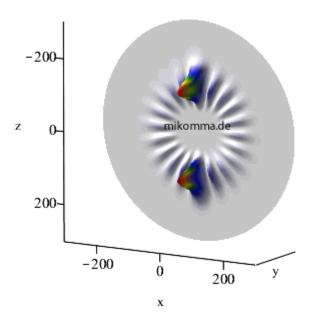


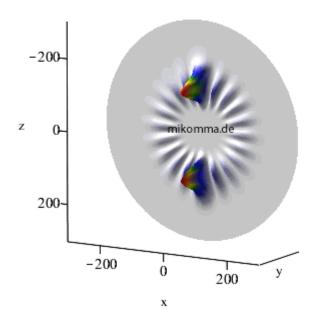


11 -> 10



11 -> 10 Zeitlupe

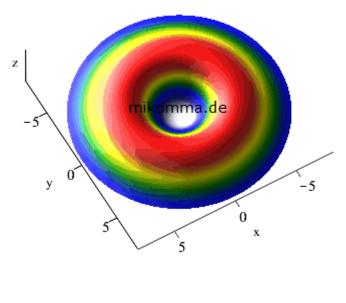


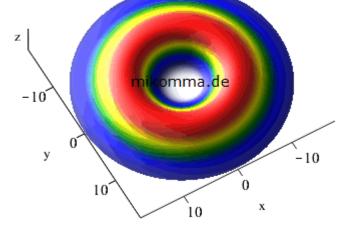


Im Gegensatz zum Hertzschen Dipol (lineare Antenne) fließt der Strom nicht entlang der z-Achse, sondern die die gesamte Ladungsverteilung (das Elektron) schwingt um den Ursprung (den Kern). Beispiele der Stromverteilung sind in <u>Elektrofluid</u> dargestellt.

2. Dipol in der x-y-Ebene: zirkular polarisiertes Photon

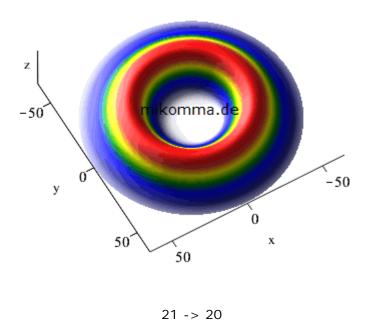
Hier sind sowohl die Drehimpulsquantenzahlen als auch die magnetischen Quantenzahlen maximal ("kreisförmiges Rydbergatom")

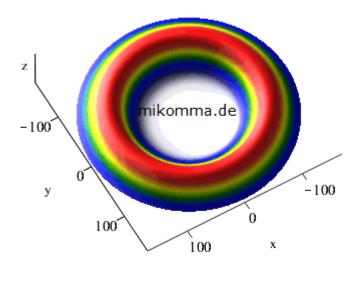




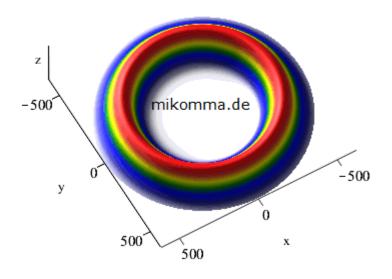
6 -> 5

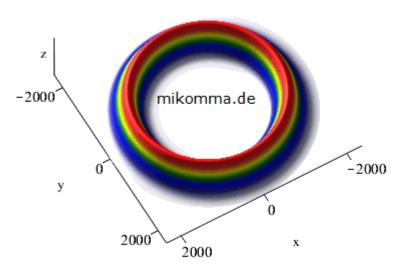
11 -> 10





41 -> 40





Bei diesen Bildern "sieht man den Strom" unmittelbar: der Schwerpunkt der Ladungsverteilung rotiert um den Ursprung, bis das Elektron im tieferliegenden Zustand angekommen ist, wobei es kontinuierlich strahlt, und nicht von einer Bahn auf die andere springt. Es bleibt aber auch nicht im tiefer gelegenen Zustand stehen, sondern setzt seine Reise fort bis in den Grundzustand, unter ständiger Emission elektromagnetischer Strahlung: Kaskade!

© Mai 2017, Dr. Michael Komma (VGWORT)

Siehe auch:

Emission eines Photons | Kaskade | Spontane Emission, logistisch | Weisskopf-Wigner What is a photon?

Der Quantensprung

Quantensprung in Zeitlupe

"Are there quantum jumps?"

Historisches zum Quantensprung

Weitere Quantensprünge

Rydbergatome

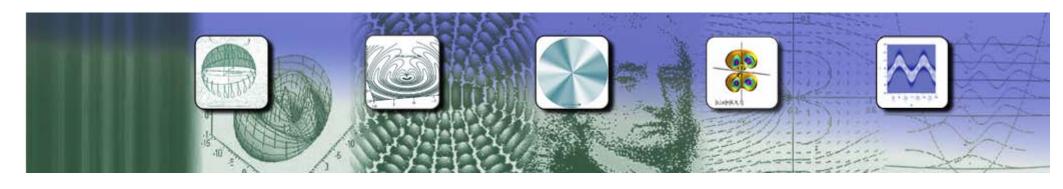
H-Orbitals aus ' Moderne Physik mit Maple'

Plancks Formel

Energieströmung

komma_AT_oe.uni-tuebingen.de

HOME | Fächer | Physik | Elektrizität | Optik | Atomphysik | Quantenphysik | Top



HOME Physik Mechanik Elektrizität Optik **Atomphysik** Quantenphysik Publikationen

English

Über die spontane Emission von Photonen Spontaneous photon emission revisited

Dieser Artikel soll die seit 1930 gängige Praxis, den Elementarprozess der Emission eines Photons in atomaren Übergängen phänomenologisch mit dem radioaktiven Zerfall (von Kernen) gleichzusetzen, etwas näher beleuchten. Die Standardbehandlung dieses Themas geht zurück auf Weisskopf und Wigner:

V. Weisskopf und E. Wigner, ZS. f. Phys. 63, 54, 1930, "Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie".

Für die emittierte Strahlung verwendet man in diesem "Standardmodell" die Analogie zum gedämpften harmonischen Oszillator, siehe S. Kikuchi, Zeitschrift für Physik, July 1930, Volume 66, Issue 7–8, pp 558–571, "Über die Fortpflanzung von Lichtwellen in der Heisenberg-Paulischen Formulierung der Quantenelektrodynamik",

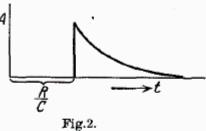
die ja gut zum "exponentiellen Zerfall" passt. Zitat Kikuchi S. 569:

Nach einigen Umformungen kann man leicht sehen, daß A_1 der Wahrscheinlichkeit des Überganges von s nach s_0 unter der Aussendung eines Lichtquants in der Richtung \mathfrak{r}_0 direkt proportional ist.

Wenn man (26) und (27) mit der Formel des klassischen elektromagnetischen Feldes eines harmonisch schwingenden Dipols mit dem imaginären Moment D vergleicht, so wird $|F_k|$ korrespondenzmäßig der k-Komponente \mathfrak{E}_k der elektrischen Feldstärke entsprechen, welche ja $1/R_0$ proportional ist. A_1 entspricht

dann dem Teil der Energiedichte, der von \mathfrak{E}_k herrührt.

Die anderen Terme von F_k , die $1/R_0^2$ bzw. $1/R_0^3$ proportional sind, kann man auch den entsprechenden Termen der klassischen Elektrodynamik zuordnen. Es



hat aber nicht viel Zweck, dies näher zu untersuchen, da man schon bei der Ausrechnung von A_1 angenommen hat, daß $R \gg \lambda$ ist, und man die Glieder der Größenordnung $1/R_0^2$ bzw. $1/R_0^3$ vernachlässigt hat. Was A_2 betrifft, so läßt sich dieses Glied auf genau dieselbe Weise behandeln, und es ergibt sich schließlich

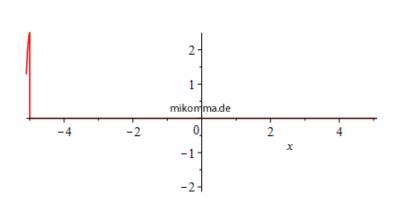
$$A_2 = \frac{1}{8\pi} \frac{16\pi^4 \, \nu_{s_1 s_0}^4}{c^4 R_0^2} \, |\, (D \cdot \mathbf{r}_0) \,|^2.$$

Dies entspricht dem magnetischen Teil der Strahlen des schwingenden Dipols mit dem Moment D. Man kann leicht zeigen, daß die Zahlenwerte von A_1 und A_2 gleich sind.

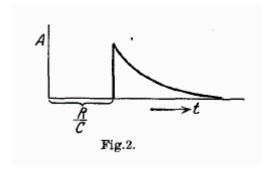
Der zeitliche Verlauf des Erwartungswertes ist in Fig. 2 schematisch angegeben. Bis zur Zeit $t=\frac{R}{c}$ bleibt er Null, und zu dieser Zeit nimmt er plötzlich einen von Null verschiedenen Wert an, um dann wegen des Abklingungsfaktors $e^{-2\pi\left(t-\frac{R}{c}\right)r}$ in D exponentiell abzunehmen.

Auf diese Art kann man den Begriff der Länge des Wellenzuges oder der Kohärenzlänge, der in der früheren Theorie nur korrespondenzmäßig definierbar war, exakt beschreiben, und der Zusammenhang mit der Lebensdauer des Atoms ist hiermit quantentheoretisch abgeleitet.

Demnach hat man sich ein Photon etwa so vorzustellen (Amplitude der Feldstärke):



Das Atom sendet also wie ein Funkeninduktor? Nein - mit diesem Modell kann etwas nicht stimmen! Selbst bei einem klassischen Funkeninduktor kann die Feldstärke nicht von 0 auf einen endlichen Wert springen (die klassische Elektrodynamik ist kausal), und auch die QED kann solche Singularitäten nur durch "Renormierungen" beheben.



Aber auch wenn man sich um Kausalitätsprobleme nicht kümmert, bleibt ein Denkfehler: der "exponentielle Zerfall" des angeregten Zustands wird auf die "Amplitude des Photons" übertragen. Dieser Denkfehler wird seit 1930 nahtlos übernommen, z.B. M.O. Scully, M.S. Zubairy "Quantum Optics" S. 208-9:

"The function
$$\Psi_{\gamma}({m r},t)=$$
 <0| ${m E}^{(+)}({m r},t)$ | $\gamma_0>$ can be

interpreted as a kind of wave function for a photon." Und S. 210: "Here the <u>step functiont is a manifestation of the fact</u> that the signal cannot move faster than the speed of light."!!

Das klappt aber nur, wenn vor der Zeit 0 der angeregte Zustand nicht besetzt war: "Abschneide-Physik"!

Eine Liste von Zitaten der in sich widersprüchlichen oder zirkulären Argumentationen zu diesem Thema wäre relativ lang...:)

Die Vorstellung eines Photons, dessen Feldstärke (Amplitude) "zur Zeit 0" schlagartig von 0 auf den maximalen Wert springt, ist also etwas problematisch, ganz abgesehen davon, dass man keine Wellenfunktion für ein Photon angeben kann (sondern nur "a kind of wave function for a photon":). Aber auch wenn man die spontane Emission eines Photons einfach als einen völlig unbestimmten "Emissionsakt" in das Reich der Unbeobachtbarkeit schiebt, bleiben einige Probleme im "Standardmodell der spontanen Emission":

Weisskopf-Wigner-Näherung (WeWi):

Abgesehen von Näherungen, die gemacht werden, um die "Bewegungsgleichungen" (Mastergleichungen), die aus der SGL für die W-Amplituden der Zustände folgen, lösen zu können, wird die Lösung nicht wirklich berechnet, sondern vorausgesetzt: "Das Atom folgt bei der Emission von Photonen dem radioaktiven Zerfallsgesetz".

Dabei geht es in WeWi nicht nur um einen (einzigen) Übergang von A nach B, sondern insbes. auch um Zerfallsreihen (WeWi S. 69):

Zur Auflösung des Gleichungssystems (23) versuchen wir folgenden Ansatz: Für a setzen wir wieder

$$a = e^{-2\pi r^A t}$$
, (24 a)

für die übrigen Größen eine Summe von Exponentialfunktionen. Der Exponent eines Gliedes — des letzten — ist dabei zunächst frei gelassen, sein Koeffizient aber so bestimmt, daß der ganze Ausdruck für t=0 verschwinden soll. In den übrigen Gliedern sind die Koeffizienten frei gelassen und die Exponenten dieselben, die in demjenigen Zustand vorkommen, aus dem dieser entsteht. Es sei also

$$b'_{\varrho'} = \beta'_{\varrho'} \left(e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{-2\pi \Gamma^B_{\varrho'} t} \right), \tag{24 b'}$$

$$b_{\varrho} = \beta_{\varrho} \left(e^{-2\pi \Gamma^{A} t} - e^{-2\pi \Gamma_{\varrho}^{B} t} \right),$$
 (24 b)

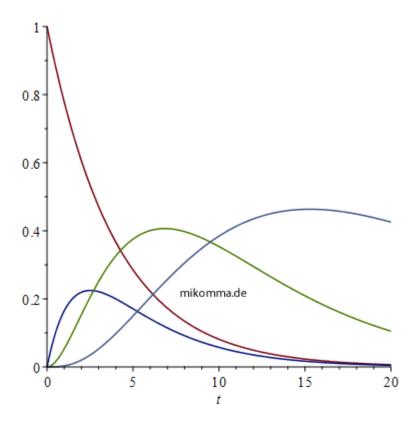
$$c_{\varrho\sigma} = \xi_{\varrho\sigma} e^{-2\pi \Gamma^{A} t} + \eta_{\varrho\sigma} e^{-2\pi \Gamma_{\varrho}^{B} t} - (\xi_{\varrho\sigma} + \eta_{\varrho\sigma}) e^{-2\pi \Gamma_{\varrho\sigma}^{C} t}. \quad (24c)$$

Die Anzahl der Glieder ist immer um eins größer als die Anzahl des Indizes.

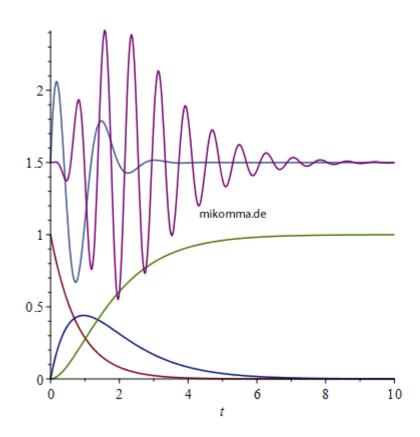
Die Gleichungen für den radioaktiven Zerfall werden also 1:1 auf die Zustände eines Atoms übertragen, das durch die spontane Emission von Photonen von a nach b nach c... übergeht.

Hier ist ein Beispiel mit 4 radioaktiven Elementen (drei Übergängen):

Und hier ein Beispiel mit zwei Übergängen (drei Kurven unten) bzw. zwei Photonen (zwei Kurven oben):



Instabile Tochterelemente erreichen nie die volle "Besetzungszahl". Erst durch Hinzufügen des "Grundzustands" (hier nicht dargestellt) wird die Summe aller Kurven 1. Übertragen auf den "Zerfall eines Atoms" bedeutet das, dass sich das Elektron auf seinem Weg in den Grundzustand nie vollständig in einem der Zwischenzustände befindet. Übrigens würde das bedeuten, dass ein Atom auf seinem Weg zum Grundzustand (der sicher eine endliche Zeit dauert) alle "erlaubten Frequenzen" mehr oder weniger gleichzeitig abstrahlt (siehe Photokaskade). Das kann durchaus richtig sein, widerspricht aber der



Hier ist nun die Besetzung des Grundzustands mit eingezeichnet (grün). Für die "Amplitude der Photonen" wurde als Einhüllende das Produkt der Besetzungszahlen (das zeitabhängige Dipolmoment, siehe) genommen. Die kleine Frequenz gehört zum ersten Übergang und die größere Frequenz zum zweiten. Folgt man der Argumentation von WeWi und Kikuchi, so müsste die Emission beider Photonen schlagartig "zur Zeit 0" beginnen. Man liest aber bei WeWi (z.B. S.58): "...und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom, das vor langer Zeit im Zustand A

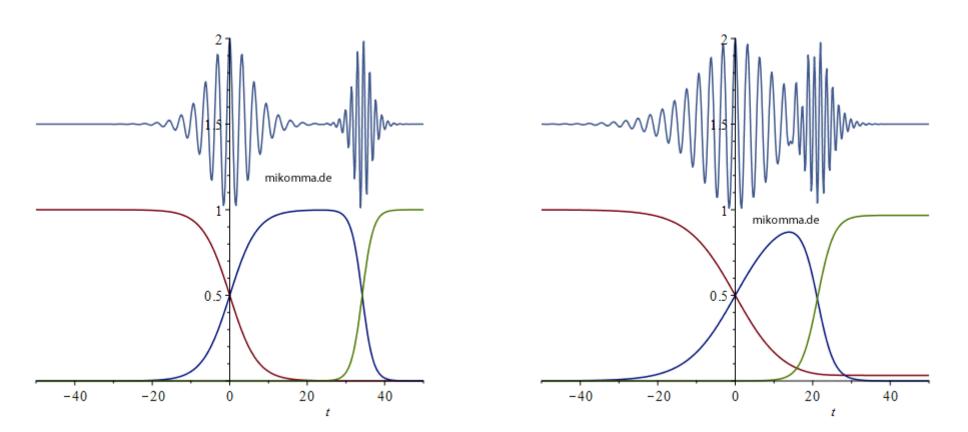
Annahme "zur Zeit t = 0" (oder wann auch immer) "springt das Atom" war, nacheinander drei Lichtquanten mit den Frequenzen ... emittiert". oder findet der "Emissionsakt" statt.

Der WeWi-Ansatz impliziert auch, dass das Atom zur "Zeit t = 0" mit maximaler Leistung zu strahlen beginnt, bzw. dass die Absorption mit maximaler Leistung zur "Zeit t = 0" endet, also entweder ein Sprung oder ein Knick vorliegt. Zur Rechtfertigung dieses Modells wird auf die Analogie zum gedämpften harmonischen Oszillator (mechanisch oder elektrisch) verwiesen, der zur Zeit t = 0 "eingeschaltet wird". Nun kann man aber Atome

- 1. nicht zur Zeit t = 0 "ein- oder ausschalten", sondern höchstens bis zur Zeit t = 0 im angeregten Zustand halten, und dann die externe Quelle/Anregung abschalten, und
- 2. reagiert ein Atom nicht wie eine gespannte Feder, die beim Loslassen mit der Frequenz des "angeregten Zustands" schwingt, sondern die Strahlung entsteht durch Überlagerung zweier Zustände mit der Schwebungsfrequenz. Wenn also das Atom zur Zeit t = 0 im station "are" angeregten Zustand ist, kann es nicht strahlen. Vielmehr muss sich erst ein Dipolmoment (oder allgemeiner ein Multipolmoment) ausbilden, das erst dann maximal wird, wenn beide Zustände gleiches Gewicht haben.
- 3. Sei noch angemerkt, dass die Übertragung des Modells "radioaktiver Zerfall" (gültig für ein Ensemble) auf das zeitliche Verhalten eines einzelnen Atoms bei der Emission oder Absorption eines Photons (also den Elementarprozess) rein *phänomen*ologisch und nicht zwingend logisch ist. Das "exponentielle Zerfallsgesetz" gilt immer, wenn alle Elementarprozesse die gleiche Wahrscheinlichkeit (Zerfallsrate) haben. Daraus kann man aber nicht schließen, dass die Elementarprozesse selbst "exponentiell abklingen", und die emittierte Strahlung ein Lorentz-Spektrum (= natürliche Linienform) aufweist: Aus einer Bilanz (oder aus Mittelwerten) lässt sich eine Dynamik des Elementarprozesses nicht zwingend ableiten.

Neues Modell - logistisches Modell

Anstatt phänomenologisch von einem exponentiellen Zerfall des Atoms auszugehen, und diesen auf das Photon zu übertragen, wird die Dynamik der Dipolschwingung in den Vordergrund gestellt. Dies führt auf die (nichtlinearen) Differentialgleichungen für logistisches Wachstum (s.u. Theorie), die für mehr als einen Übergang leider nur numerisch lösbar sind.



Über den Kurven für die Besetzungszahlen sind wieder "die Amplituden der Photonen" dargestellt. Im Gegensatz zum "Standardmodell des exponentiellen Zerfalls" haben die Zustände des Atoms (A (rot), B (blau) und C (grün)) nun auch eine Vergangenheit (t < 0) und dementsprechend erscheinen die Photonen als Wellenpakete ohne "scharfe Kante".

Ein wichtiges Merkmal des "logistischen Modells" sind die Anfangswerte: In der linken Abbildung ist C(0)=10⁻¹⁰ und in der rechten Abbildung C(0)=10⁻³ (zusätzlich wurden in der rechten Abbildung die "Zerfallsraten" verringert). D.h., im logistischen Modell gibt es keine stationären Zustände. Auch für -1000

C(0)=10 würde ein Übergang "irgendwann" (das lässt sich auch berechnen:) stattfinden, quasi spontan und ohne Unterstützung durch das Vakuum. Aber weil das System sehr empfindlich auf Störungen reagiert, kann selbst das Vakuum einen Übergang auslösen - und erst recht die allgegenwärtige Hintergrundstrahlung bei Temperaturen über dem absoluten Nullpunkt (wobei dann beide "Triggermechanismen" für die Impulserhaltung sorgen).

Ein zweites Merkmal des logistischen Modells ist die "Trennung der Emissionsakte" (wie von WeWi stillschweigend angenommen, aber nicht erfüllt). Wenn der Grundzustand C "zur Zeit 0" nicht besetzt ist, und der Übergang von A nach B "schnell genug" erfolgt (linke Abbildung), werden die Photonen nacheinander emittiert. Andererseits bewirkt eine "zu frühe Bevölkerung von C" (oder ein "zu langsamer" Übergang von A nach B) eine zeitliche Überlappung der Photonen, bzw. eine "Niveau-Unschärfe" (Linienverbreiterung) des ersten Übergangs - ganz im Sinne von WeWi.

Das logistische Modell erklärt also den Quantensprung? Spaß beiseite, hier kommt noch etwas Theorie...

Theorie

Ausgangspunkt ist wie in Emission eines Photons wieder der Zustand

$$\Psi_{\text{atom, photon}} = c_{\text{a0}}(\,t) \,\mid \! a \, \rangle \,\mid 0 \, \rangle \, + c_{g1}^{}(\,t) \,\mid \! g \, \rangle \,\mid 1 \, \rangle$$

Wie oben erwähnt, geht das hier vorgeschlagene *logistische Modell der spontanen Emission* davon aus, dass die von einem Atom abgestrahlte Leistung proportional zum Quadrat des Dipolmoments ist, dessen Zeitabhängigkeit durch $c_a^2 c_q^2$ gegeben ist (in diesem Zusammenhang können die c als reell betrachtet werden).

Der Sachverhalt lässt sich kompakter formulieren, wenn man von den W-Amplituden c zu ihren Quadraten übergeht, bzw. zur Dichtematrix ρ ("optische Blochgleichungen"). Für zwei Zustände (einen Übergang) lassen sich die Differentialgleichungen (Mastergleichungen) exakt lösen.

Die Änderung des Grundzustands ρ_{qq} ist dem Quadrat des Dipolmoments ρ_{qq} (1- ρ_{qq}) (= abgestrahlte Leistung) proportional.

Stellt man diesen physikalischen Sachverhalt in den Vordergrund und gibt nicht ein "exponentielles Abklingen" als Lösung vor, so erhält man mit der Proportionalitätskonstanten k die Differentialgleichung:

$$\rho_{qq} = k \rho_{qq} \left(1 - \rho_{qq} \right)$$

auch bekannt als die *logistische Differentialgleichung*. Sie hat die "standartisierte" Lösung (ρ_{aa} (0)=1/2):

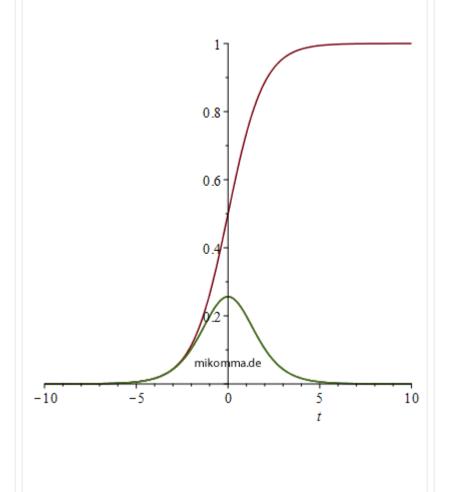
$$\rho_{gg} = \frac{1}{1 + e^{-kt}} = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{kt}{2}\right) \right)$$

auch bekannt als *logistische Funktion*, oder *kumulative logistische Verteilung* (bzw. Fermi-Dirac-Verteilung - an der Hochachse gespiegelt).

Mit der Ableitung (= vom Dipol abgestrahlte Leistung):

$$\rho_{qq}^{\bullet} = \frac{k e^{-kt}}{\left(1 + e^{-kt}\right)^2} = \frac{k}{4} \left(1 - \tanh\left(\frac{kt}{2}\right)^2\right) = \frac{k}{4} \operatorname{sech}\left(\frac{kt}{2}\right)^2$$

Grundzustand ρ_{gg} (rot) und Ableitung von ρ_{gg} nach der Zeit (grün):



Das Frequenzspektrum erhält man durch Fouriertransformation.

Die Amplitude der E-Feldstärke ist proportional zur Wurzel der Energie (od. Leistung):

$$E(t) \sim \frac{e^{-\frac{kt}{2}}}{1 + e^{-kt}} = \frac{1}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{kt}{2}\right)$$

Auch bekannt als hyperbolic secant distribution.

Weil das Frequenzspektrum ohnehin auf 1 (Fläche) normiert werden muss, wird hier k vernachlässigt und nur die elektrische Feldstärke betrachtet.

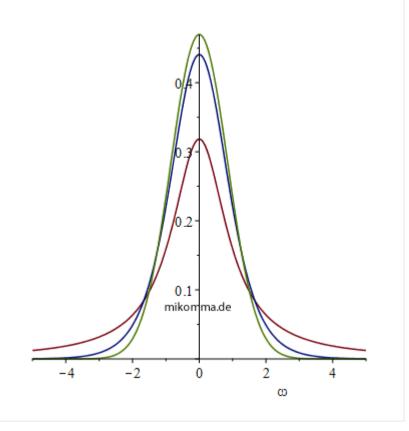
Die Fouriertransformierte von E(t) ist dann

$$E(\omega) = \frac{1}{k} \operatorname{sech}\left(\frac{\omega \pi}{k}\right)$$

und ihr auf 1 normiertes Quadrat, also das Intensitätsspektrum für ein Photon mit der Energie 1 (= ω)

$$I(\omega) = \frac{\pi}{2 k} \operatorname{sech} \left(\frac{\omega \pi}{k} \right)^2$$

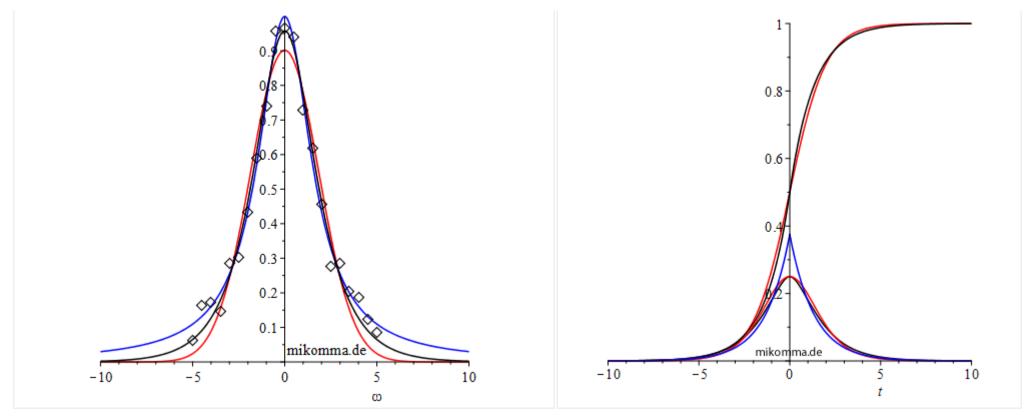
Vergleich von Lorentz- (rot), Logistik- (blau) und Gaußlinie (grün) mit gleicher fwhm (alle Verteilungen auf 1 normiert).



Bei diesem Vergleich (obige Abbildung) kommt es zunächst auf die Form der Linien an: Die Lotentzlinie hat immer die weitesten "Flügel", weil das (künstliche) Abschneiden des zeitlichen Verlaufs der Emission einen hohen Anteil beliebig hoher Frequenzen bedingt. Interessant ist auch, dass sich die Gaußlinie nur wenig von der Logistiklinie unterscheidet, und beide Linientypen "ihre eigenen Transformierten" sind (Gauß - Gauß und sech - sech).

Es ist übrigens gar nicht so einfach, aus Messdaten die Linienform zu bestimmen. In der Abbildung unten wurden aus einer Lorentzverteilung mit Maximalwert 1 "Messpunkte" erzeugt, indem zur Ordinate der Verteilung Zufallszahlen zwischen -0.5 und +0.5 addiert wurden. Die drei Kurven zeigen Kurvenfits für die Modelle Lorentz (blau), Gauß (rot) und Logistik (schwarz).

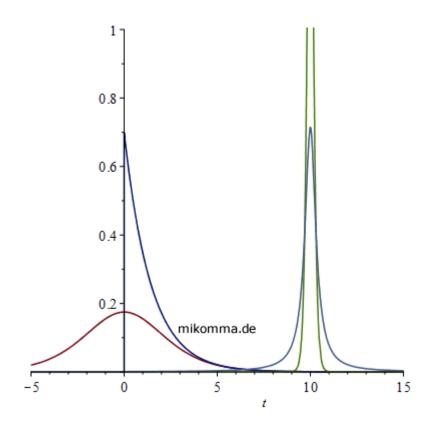
Eine Möglichkeit, die Abschneidephysik zu reparieren, wäre eine "Zerfallskurve", die durch die Spiegelung des abgeschnittenen exponentiellen Zerfalls am Punkt (0 | 0.5) ergänzt wird. Bei passender Wahl der Parameter unterscheidet sich dann die zugehörige Kurve für ρ_{gg} (schwarz) nur minimal von der logistischen Funktion (rot). Das Gleiche gilt für die Produkte $\rho_{gg}(1-\rho_{gg})$, die ebenfalls unten schwarz und rot dargestellt sind ("Glockenkurven"). Allerdings hat dann die Ableitung der zusammengesetzten Funktion (schwarz) einen Knick (blau), bzw. "die Amplitude des Photons" hat in der Mitte eine Spitze (einen Quantenknick :), während die Ableitung der logistischen Funktion dem Produkt $\rho_{gg}(1-\rho_{gg})$ proportional ist. Das ist aber immer noch besser, als ein "Sägezahnphoton", das "zur Zeit 0" beginnt...



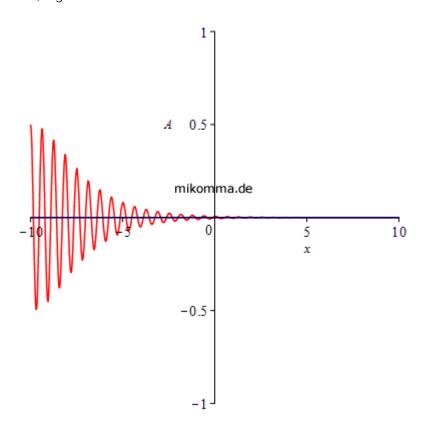
Und wie sieht nun das Photon aus?

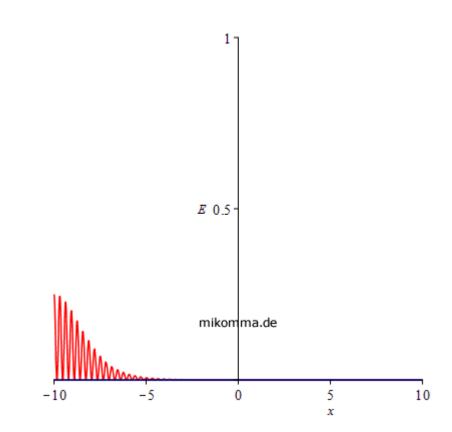
Nebenstehend noch eine Animation zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen einem "Kikuchi-Photon" (navy, sprunghafter Beginn bei t = 0 mit exponentiellem Abklingen) und einem "logistischen Photon" (purple, secans hyperbolicus). Dargestellt sind die Einhüllenden der (momentanen) Energie, jeweils normiert auf die Fläche 1 und mit der "Zerfallskonstanten" als Parameter. Heisenberg war ja Zeit seines Lebens davon überzeugt, dass die Diskontinuität ein "Wesensmerkmal der Quantenmechanik" sei. Sein Schüler Kikuchi hat diese Überzeugung zumindest zu einer Hälfte übernommen: "Die Emission eines Photons setzt schlagartig ein" (natürlich zur Zeit t = 0!), aber danach (für t > 0) sind wir wieder in der klassischen Physik, und alles verläuft Detail durchgerechnet kontinuierlich alles bis ins mit den Maxwellgleichungen!

Aber zum Glück gibt es ja die Heisenbergsche Unschärferelation und die Fouriertransformation! Die zugehörigen Linienprofile sind bei t=10 (t in diesem Fall als Frequenz) zu sehen. Lorentzprofil breit (hellblau), "logistisches Profil" schmal (hellgrün). Die Darstellung wurde nach oben abgeschnitten - wegen der Unschärferelation $\Delta f \Delta t = \text{const}$:-). (Zur Orientierung: die Maxima der Kurven liegen oberhalb von 3.)



Die nächsten beiden Animationen zeigen das "Kikuchi-Photon" (blau) und das "logistische Photon" (rot). Links die Amplitude und rechts die Energie (Quadrat der Amplitude, gesamte Energie jeweils auf 1 norniert).





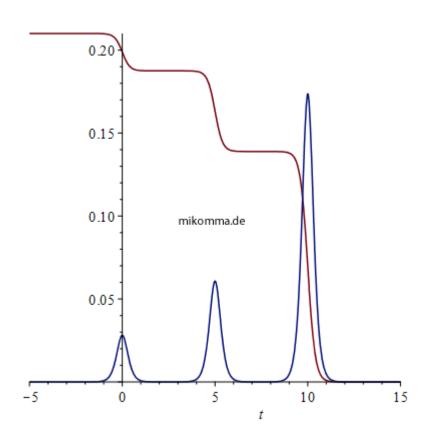
Man könnte also "Kikuchi-Photonen" auch als "halbe Photonen" bezeichnen, aber die git es ja bekanntlich nicht :-).

Und wenn nun beim "Zerfall eines Atoms" mehr als ein Photon emittiert wird? Dann sagt die WeWi-Theorie voraus, dass dies wie beim radioaktiven Zerfall geschieht, also simultan auf allen möglichen Frequenzen/Übergängen, im Widerspruch zu der von WeWi selbst gemachten Annahme, dass die Übergänge (= Quantensprünge) nacheinander stattfinden (siehe auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Monte-Carlo-Quantenspringer :-). Was sagt das "logistische Modell" dazu?

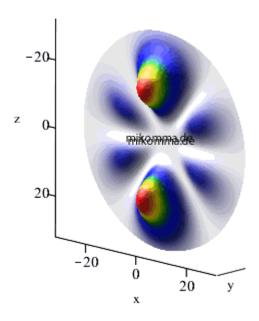
Kaskaden im logistischen Modell

Der zeitliche Verlauf einer Kaskade von n=4 nach 3, 2, 1 könnte z.B. so aussehen (Abbildung rechts). Die rote Kurve zeigt die Niveaus im Abstand der Hauptquantenzahlen ($\sim 1/n^2$), die blaue Kurve die Abstrahlung, modelliert als zeitliche Änderung der Energie des Atoms.

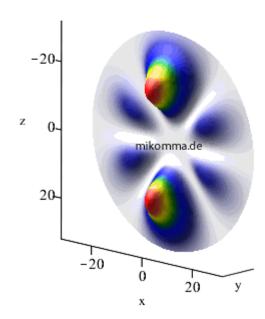
Im Gegensatz zum "Standardmodell" (WeWi) muss sich im logistischen Modell das Atom bei der sukzessiven Emission von Photonen nicht an eine "radioaktive Zerfallsreihe" halten, die einerseits durch Differentialgleichungen beschrieben wird, und andererseits "zufällige Emissionsakte" (Quantensprünge) zu beliebiger Zeit erfordert, was ja schon in sich widersprüchlich ist: Im logistischen Modell laufen die Übergänge kontinuierlich ab, wobei die Geschwindigkeit des Übergangs (= Steigung der roten Kurve an den Übergängen) wie oben berechnet wurde. Wann ein Übergang stattfindet, bzw. in welchem zeitlichen Abstand die Übergänge erfolgen, hängt im logistischen Modell von den "Anfangsbedingungen" ab: Die "horizontalen Kurvenstücke" der roten Kurve sind nicht exakt horizontal, sondern haben (in nebenstehender Darstellung) eine Steigung von der Größenordnung 10⁻¹⁰. Schmetterlingseffekt! (Und wem dieser Zufall nicht objektiv genug ist, kann gerne noch das QED-Vakuum als Auslöser und zur Impulserhaltung einbeziehen :-).



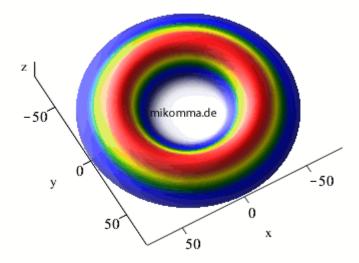
Zum Schluss noch die Visualisierung der atomaren Wellenfunktionen zweier Kaskadenübergänge im Vergleich. Links das logistische Modell, rechts das Standardmodell der <u>Photonenkaskade</u>.



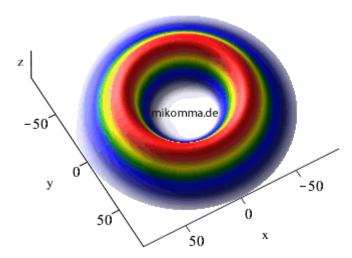
 $n = 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5$, maximales m und l



 $n = 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5$, maximales m und I



In beiden Fällen sieht man auch in der Darstellung der Wellenfunktionen deutlich, dass der Zwischenzustand (n=3, bzw. n=6) im Standardmodell nur andeutungsweise vorkommt.



Zusammenfassung und Ausblick

Wenn man die Näherung von Weisskopf und Wigner genauer betrachtet, stellt man fest, dass es gar nicht nötig gewesen wäre, ein exponentielles Abklingen des angeregten Zustands *vorauszusetzen*. Vielmehr ergibt sich das exponentielle Abklingen aus den dort gemachten Näherungen und der Linearität der Schrödingergleichung, bzw. der Linearität der aus der SGL folgenden Mastergleichungen.

Es bleibt allerdings erstaunlich, dass der *Elementarprozess*, bzw. die *Dynamik* der spontanen Emission eines Photons seither kaum hinterfragt wurde, abgesehen von wenigen Ausnahmen wie z.B. P.W. Milonni (s.u.). Man gibt sich eben gerne mit der ersten Näherung (Linearität) zufrieden, so lange dieses Standardschema (Lorentzlinie) passt, und Messungen kein Indiz für die Notwendigkeit einer Korrektur des Standardmodells liefern. Aber welche

Messungen und welche Auswertungen? Wenn von vornherein "klar ist", dass die "natürliche Linienbreite" und insbes. Linien*form* durch das "exponentielle Zerfallsgesetz" gegeben sind, macht man keine Experimente, die das widerlegen könnten, und alle Kurvenfits werden so eingerichtet, dass die Kurven zum Standardmodell - der Lorentzlinie - passen. Darüber hinaus kann die "natürliche Linienbreite" experimentell nur in den seltensten Fällen gemessen werden (wenn überhaupt!), weil die Messungen durch Stoßverbreiterung (Lorentzspektrum) und Dopplerverbreiterung (Gaußspektrum) überlagert werden, die die Charakteristika des Elementarprozesses um mehrere Größenordnungen übersteigen. Man kümmert sich deshalb in der Praxis eher darum, die Messergebnisse zu entfalten (Voigt-Profile), und weniger um den Elementarprozess an sich, dessen Linienbreite oft als nicht messbar angesehen wird. Dann fällt es natürlich nicht auf, wenn der Elementarprozess eine kleinere Linienbreite und insbesondere eine schmalere Linien*form* hat als die standardmäßig vorausgesetzte Lorentzlinie.

Das hier vorgestellte "logistische Modell der spontanen Emission" fiel also über lange Zeit durch das Raster, weil

- a) der Elementarprozess der spontanen Emission mit dem Verhalten eines Ensembles, das der linearen SGL "gehorcht", gleichgesetzt wurde, und
- b) Linienbreite und -form des Elementarprozesses unterhalb der "nicht messbaren" Werte liegen, wenn der Elementarprozess nicht linear ist.

Was nun? Es fehlt ein experimentum crucis! Man könnte z.B. untersuchen:

- 1. Superradianz: Wenn Licht im Medium Solitonen bilden kann, die <u>o.g. Gleichungen</u> folgen, dann sollte es auch möglich sein, das Medium so weit zu verdünnen, dass man den Elementarprozess sieht?
- 2. Rydbergatome: Man hat inzwischen gelernt, Atome so zu manipulieren, dass sie sich quasi klassisch verhalten. Dann müsste man doch auch herausfinden können, ob in einer atomaren Kaskade die Photonen "gleichzeitig" oder nacheinander emittiert werden?

Literatur:

- V. Weisskopf und E. Wigner, ZS. f. Phys. 63, 54, 1930

Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie.

- S. Kikuchi, Zeitschrift für Physik, July 1930, Volume 66, Issue 7-8, pp 558-571

Über die Fortpflanzung von Lichtwellen in der Heisenberg-Paulischen Formulierung der Quantenelektrodynamik.

- P. W. Milonni, Am. J. Phys., Vol. 52, No. 4, April 1984

Why spontaneous emission?

© Juli 2017, Dr. Michael Komma (VGWORT)

Siehe auch:

Emission eines Photons | Galerie | Kaskade | Weisskopf-Wigner

What is a photon?

Der Quantensprung

Quantensprung in Zeitlupe

"Are there quantum jumps?"

Historisches zum Quantensprung

Weitere Quantensprünge

Rydbergatome

Elektrofluid

H-Orbitals aus ' Moderne Physik mit Maple'

Plancks Formel

Energieströmung

komma AT oe.uni-tuebingen.de

HOME | Fächer | Physik | Elektrizität | Optik | Atomphysik | Quantenphysik | Top